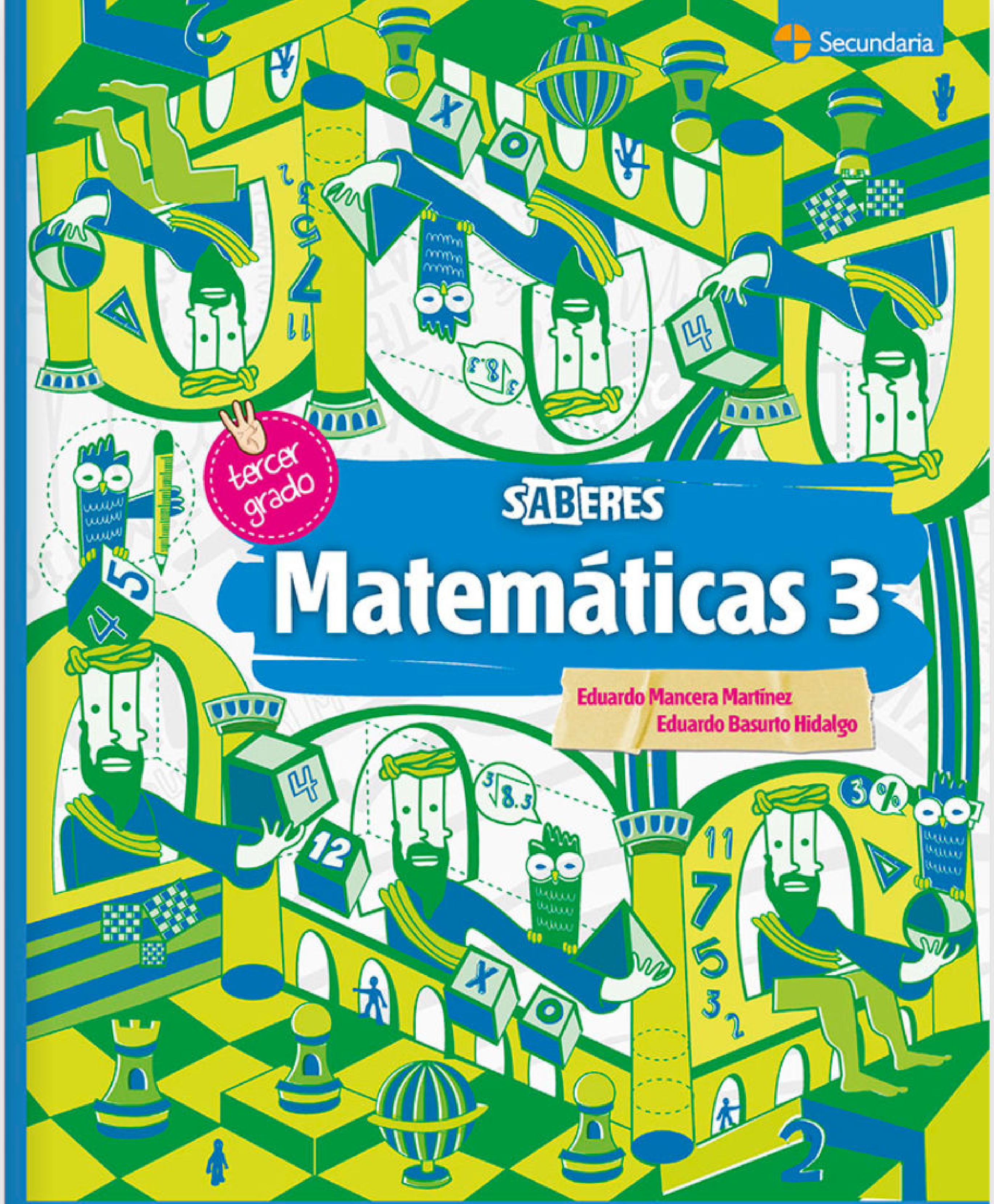
Secundaria



tercer grado

SABERES

Matemáticas 3

Eduardo Mancera Martínez
Eduardo Basurto Hidalgo

APRENDER, SIEMPRE

PEARSON

Datos de catalogación

Autores: Mancera Martínez, Eduardo y Eduardo Basurto Hidalgo

Matemáticas 3
Serie Saberes
Tercer grado, educación secundaria.
1ª Edición

Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2014
ISBN SEP: 978-607-32-2467-3
ISBN: 978-607-32-2464-2
Área: Secundaria

Formato: 20.5 x 27cm Páginas: 272

Matemáticas 3. Serie Saberes

Texto del Estudiante

El proyecto didáctico Matemáticas 3. Serie Saberes, es una obra colectiva creada por encargo de la editorial Pearson Educación de México, S.A. de C.V., por un equipo de profesionales en distintas áreas, que trabajaron siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento pedagógico de Pearson Educación México, S.A. de C.V.

Especialistas en Matemáticas responsables de los contenidos y su revisión técnico-pedagógica:

Autores: Eduardo Mancera Martínez y Eduardo Basurto Hidalgo

Revisor didáctico: Diana Alicia Góngora Navarro

Dirección general: Sergio Fonseca ▪ **Dirección de innovación y servicios educativos:** Alan David Palau ▪ **Gerencia de contenidos y servicios editoriales:** Jorge Luis Íñiguez ▪ **Gerencia de arte y diseño:** Asbel Ramírez ▪ **Coordinación de arte y diseño:** Mónica Galván Álvarez ▪ **Especialista en contenidos de aprendizaje:** Yoselin Flores Zenteno ▪ **Editor de desarrollo:** Marco Antonio Villa Juárez ▪ **Evaluaciones PISA:** Pamela Villamil Sapién ▪ **Autoevaluaciones:** Mayra Martínez De Garay ▪ **Corrección de estilo y cuidado de la edición:** Marco A. Villa Juárez ▪ **Asistencia editorial:** Cintia Betsabé Pérez Villanueva ▪ **Diseño de interiores:** Josué Cortés ▪ **Diseño de portada:** Fabiola Baires ▪ **Composición y diagramación:** Overprint S. A. de C. V. ▪ **Ilustración:** Ismael Vázquez ▪ **Investigación iconográfica:** Cintia Betsabé Pérez Villanueva ▪ **Fotografía:** Glowimages.

Créditos iconograficos:
© Glowimages: pp. 52, 58, 59, 66, 68, 91, 104, 148, 154, 225, 241.

Contacto: soporte@pearson.com
Primera edición, 2014

ISBN: 978-607-32-2464-2
ISBN E-BOOK: 978-607-32-2465-9
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-2466-6
ISBN SEP: 978-607-32-2467-3

Avenida Antonio Dovalí Jaime No. 70,
Torre B, Piso 6, Colonia Zedec Ed Plaza Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón, Ciudad de México, C.P. 01210

Impreso en México. *Printed in Mexico*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 19 18 17 16

PEARSON

Introducción

En el presente libro, como los elaborados en la serie *Saberes* para los grados anteriores, se insiste en la importancia de abandonar la imagen que se ha tenido de la matemática como un campo de conocimiento en el cual sólo se emplean algoritmos o procedimientos rutinarios sujetos a determinadas reglas. Puesto que la creación de conocimiento matemático no se inició de esa forma, hemos invitado a los lectores a realizar actividades tendentes a considerarlo como un conocimiento surgido de un cúmulo de esfuerzos por entender la naturaleza y la sociedad, sin reglas preestablecidas, ensayando y ajustando lo necesario en los intentos para resolver diversos problemas.

Aunque el trabajo de los matemáticos muchas veces se concentra en obtener algoritmos que facilitan el trabajo y ayudan a concentrarse en otras relaciones inexploradas, en vez de distraerse en repetir un sinnúmero de pasos e intentos para realizar determinado trabajo; en la escuela deben explicarse y fomentar la búsqueda de explicaciones acerca de las razones que están detrás de los algoritmos por medio de la creatividad para explorar relaciones y encontrar vínculos entre elementos con cualidades especiales, tanto cuantitativas como espaciales. Las reglas o procedimientos estereotipados llegaron mucho después, cuando los elementos que intervienen en diversas situaciones pudieron ser reconocidos y se descubrió un comportamiento común o regularidades entre ellos.

Por varias décadas, la enseñanza de la matemática ha concentrado su atención en ir de lo general (los símbolos) a lo particular (las situaciones de aplicación de los conocimientos matemáticos), con lo cual, ya se ha visto, no se logra una comprensión profunda de las relaciones matemáticas.

En la actualidad existe una tendencia notable a propiciar situaciones que generen la reflexión de los estudiantes para que, de forma paulatina, conformen sus propios significados y simbolizaciones, que los preparen para arribar al conocimiento abstracto con el que ahora interactuamos.

La resolución de problemas, el corazón de la matemática, se ha vuelto el objetivo y la herramienta didáctica con el fin de no privilegiar los estereotipos, después de pasar por un proceso constructivo del conocimiento.

De esta manera, el texto de la asignatura de matemáticas del último grado de la educación secundaria, con todas las limitaciones de espacio por las características impuestas a los libros de texto, tiene el propósito de ayudar en el inicio del proceso de aproximarse al conocimiento matemático por medio de analizar, reflexionar, discutir, crear los propios códigos de comunicación y, en un momento cúspide, llegar al conocimiento compartido y reconocido por todos. No basta hacer ensayos ni intentos para resolver problemas, hay que llegar al punto final que permita organizar el conocimiento.

Al respecto, conviene tener presente lo que Albert Einstein expresó en alguna ocasión: "Las proposiciones matemáticas, en cuanto tienen que ver con la realidad, no son ciertas; y en cuanto que son ciertas, no tienen nada que ver con la realidad".

Presentación para el alumno

En el tercer grado de educación secundaria ya estarás perfilando cierto interés por algún campo del conocimiento y con seguridad te habrás dado cuenta de que en varios de éstos la matemática desempeña un papel en su desarrollo, porque existen muchas situaciones de tu vida diaria que pueden ser comprendidas a partir de ella; no sólo por el uso de las fórmulas, sino por diferentes tipos de razonamiento o argumentaciones que implican medidas, relaciones entre éstas, localización de objetos, diagramas y gráficas, entre otros recursos de esta ciencia. Con ello, la matemática te ayuda a interpretar la información de tu entorno.

Este libro te ayudará a explorar de manera natural diversas situaciones que te conducirán al desarrollo del pensamiento matemático, con el cual podrás tener una mejor perspectiva del mundo que te rodea a partir del uso de relaciones numéricas, gráficas o simbólicas.

No se trata de aprender contenidos de memoria, sino de centrar tu atención en los elementos que constituyen un problema, analizarlos y sintetizar algunas de sus propiedades y así utilizarlos para comprender lo que sucede o predecir lo que podría acontecer. Así, con ayuda de tu profesor, este volumen te llevará a través de situaciones problemáticas que te invitarán a interpretar y reflexionar, buscar soluciones por tu cuenta, trabajar en equipo y comunicarte con tus compañeros.

Para facilitar el entendimiento de los temas expuestos encontrarás, entre otros recursos, imágenes, esquemas, propuestas para el uso de software, acertijos, sugerencias de consulta de otros materiales y un glosario en el que se definen los términos y conceptos de difícil compresión. Asimismo, hemos incluido una guía de uso de tu libro, lo que te permitirá conocerlo para obtener el mayor provecho posible.

Con el apoyo de este libro y de tu profesor tienes la oportunidad de experimentar y explorar los conocimientos matemáticos en varias situaciones. Para ello debes abordar los contenidos con el ánimo de resolver los planteamientos y, junto con tus compañeros, proponer soluciones y valorarlas; este camino es necesario para que desarrolles competencias matemáticas y logres los aprendizajes esperados. Tu esfuerzo es invaluable y nada puede sustituirlo, pues es parte de la responsabilidad que tienes en la construcción de nociones y procedimientos matemáticos que te ayudarán a comprender mejor tu mundo y continuar preparándote para enfrentar los retos de tu vida cotidiana.

Presentación para el profesor

Es importante considerar que la matemática no es una colección de reglas por utilizar, que no sabemos por qué funcionan; en cambio debe reconocerse que la matemática forma parte de la herencia cultural de muchos grupos humanos, ha sido la base para generar nuevo conocimiento, y tiene una estrecha relación con la ciencia y la tecnología. Otra razón es que al estudiar la matemática se razona y ordena el pensamiento, condiciones indispensables para que todo individuo pueda desenvolverse y solucionar los retos que se le presentan en la vida diaria.

Este libro de texto se elaboró considerando que las funciones del profesor son fundamentales para estimular y ayudar a sus estudiantes a enfrentar diversas situaciones problemáticas desde el esfuerzo personal y el trabajo en equipo, así como para explorar relaciones matemáticas, resolver problemas de manera autónoma, encontrar diversas formas de solucionarlos, formular argumentos que validen sus resultados y comunicarlos adecuadamente en forma oral y escrita.

De esta manera, usted logrará el desarrollo de competencias matemáticas en sus alumnos para alcanzar los aprendizajes esperados. Asimismo, en su labor como docente tiene la responsabilidad de guiar a sus estudiantes, usando los conocimientos que ya poseen, a través de diversas problemáticas hasta alcanzar paulatinamente el conocimiento matemático pretendido en el currículo.

Sabemos que enseñar matemáticas es un gran reto y por ello hemos diseñado secuencias de aprendizaje con el fin de que su trabajo se centre en guiar a sus estudiantes, encaminándolos y propiciando que no partan de símbolos abstractos y sin alguna expectativa del contenido por aprender, sino que tengan espacios de discusión y trabajo colectivo, a partir de los cuales conformen sus primeras ideas sobre diversos temas de matemáticas que gradualmente podrán ser formalizados, de acuerdo con el nivel que corresponde a su desarrollo y con los fines que se persiguen en la educación secundaria.

Para facilitar su labor, hemos incluido una propuesta de dosificación semanal para todo el ciclo escolar. Asimismo, encontrará sugerencias de materiales de consulta y de software, entre otros recursos. Así, estimado profesor, le ofrecemos este libro esperando que se convierta en un apoyo más para la construcción de esa visión matemática en sus alumnos.

Índice

Introducción ... 3
Presentación para el alumno ... 3
Presentación para el profesor ... 4
Dosificación ... 7
Conoce tu libro ... 12

Bloque 1 ... 16
Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
1. Patrones y ecuaciones ... 18
Ecuaciones cuadráticas ... 18
Eje: Forma, espacio y medida
2. Figuras y cuerpos ... 26
Triángulos "bien parecidos" ... 26
Los congruentes están entre los semejantes ... 36
Eje: Manejo de la información
3. Proporcionalidad y funciones ... 46
Representaciones matemáticas de un fenómeno ... 46
Variación cuadrática ... 52
4. Nociones de probabilidad ... 58
Escala de probabilidad ... 58
5. Análisis y representación de datos ... 64
Diseño de encuestas y muestreo ... 64
Prueba tipo PISA ... 70
Ponte a prueba ... 72

Bloque 2 ... 74
Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
1. Patrones y ecuaciones ... 76
Problemas cuadráticos ... 76
Eje: Forma, espacio y medida
2. Figuras y cuerpos ... 84
Rotación y traslación de figuras ... 84
Combinación de transformaciones geométricas ... 91
3. Medida ... 100
Teorema de Pitágoras ... 100
Utilidad del teorema de Pitágoras ... 107
Eje: Manejo de la información
4. Nociones de probabilidad ... 114
Combinación de transformaciones geométricas ... 114
Prueba tipo PISA ... 120
Ponte a prueba ... 122

Bloque 3 ... 124
Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
1. Patrones y ecuaciones ... 126
Problemas cuadráticos ... 126

Eje: Forma, espacio y medida
2. Figuras y cuerpos 134
Cuando las figuras son parecidas, ¿qué se hace con ellas? 134
Resolviendo con Tales 142
Figuras homotéticas 150
Eje: Manejo de la información
3. Proporcionalidad y funciones 156
Gráficas de funciones cuadráticas 156
Gráficas de funciones cuadráticas II 161
4. Nociones de probabilidad
Regla del producto 168
Prueba tipo PISA 172
Ponte a prueba 174

Bloque 4 176
Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
1. Patrones y ecuaciones 178
Expresiones cuadráticas y sucesiones 178
Eje: Forma, espacio y medida
2. Figuras y cuerpos 184
Regla del producto 184
3. Medida 192
Pendientes y triángulos 192
Relaciones de lados en triángulos rectángulos acutángulos 198
Razones trigonométricas 204
Eje: Manejo de la información
4. Proporcionalidad y funciones 210
Regla del producto 210
5. Análisis y representación de datos 216
Desviación y rango 216
Prueba tipo PISA 222
Ponte a prueba 224

Bloque 5 226
Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
1. Patrones y ecuaciones 228
Ecuaciones de varios tipos 228
Eje: Forma, espacio y medida
2. Medidas 234
Regla del producto 234
De los prismas y pirámides a los cilindros y conos 240
Partes totales de cilindros y conos 246
Eje: Manejo de la información
3. Proporcionalidad y funciones 252
Regla del producto 252
4. Nociones de probabilidad 259
Juegos equiprobables y no equiprobables 259
Prueba tipo PISA 266
Ponte a prueba 268

Bibliografía sugerida 270
Sitios de internet sugeridos 272

Bloque 1

Aprendizajes esperados:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Fecha	Semana	Páginas	Materiales	Contenido	Tema	Eje
	1			Encuadre del curso e integración grupal.		
	2	18		Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	1. Patrones y ecuaciones	Sentido numérico y pensamiento algebraico
	3	26	Juego de geometría	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	2. Figuras y cuerpos	Forma, espacio y medida
	4	36	Juego de geometría	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.		
	5	46	Papel milimétrico y juego de geometría	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	3. Proporcionalidad y funciones	Manejo de la información
	6	52	Papel milimétrico y juego de geometría	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.		
	7	58		Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	4. Nociones de probabilidad	
	8	64		Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	5. Nociones de probabilidad	
				Prueba tipo PISA		
				Ponte a prueba		

Bloque 2

Aprendizajes esperados:

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras

Fecha	Semana	Páginas	Materiales	Contenido	Tema	Eje
	9	76		Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	1. Patrones y ecuaciones	Sentido numérico y pensamiento algebraico
	10	84	Juego de geometría	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	2. Figuras y cuerpos	Forma, espacio y medida
	11	91	Juego de geometría	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.		
	12	100	Rompecabezas	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	3. Medida	
	13	107		Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.		
	14	114		Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)	4. Nociones de probabilidad	Manejo de la información
				Prueba tipo PISA		
				Ponte a prueba		

Bloque 3

Aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Fecha	Semana	Páginas	Materiales	Contenido	Tema	Eje
	15	126		Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	1. Patrones y ecuaciones	Sentido numérico y pensamiento algebraico
	16	134		Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	2. Figuras y cuerpos	Forma, espacio y medida
	17	142		Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.		
	18	150	Juego de geometría	Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.		
	19	156	Papel milimétrico, juego de geometría y lápices de color	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	3. Proporcionalidad y funciones	Manejo de la información
	20	161	Papel milimétrico, juego de geometría y lápices de color	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.		
	21	168	Dados y monedas	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	4. Nociones de probabilidad	
				Prueba tipo PISA		
				Ponte a prueba		

Bloque 4

Aprendizajes esperados:

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Fecha	Semana	Páginas	Materiales	Contenido	Tema	Eje
	22	178		Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	1. Patrones y ecuaciones	Sentido numérico y pensamiento algebraico
	23	184	Cartulina, palillos y popotes	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	2. Figuras y cuerpos	Forma, espacio y medida
	24	192	Papel milimétrico, juego de geometría y lápices de color.	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	3. Medida	
	25	198		Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.		
	26	204		Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.		
	27	210		Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	4. Proporcionalidad y funciones	Manejo de la información
	28	216		Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	5. Análisis y representación de datos	
Prueba tipo PISA						
Ponte a prueba						

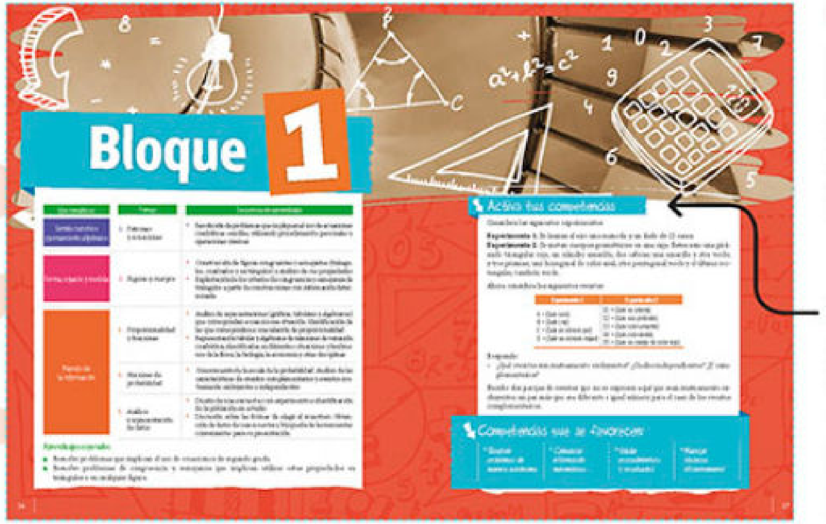
Bloque 5

Aprendizajes esperados:

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Fecha	Semana	Páginas	Materiales	Contenido	Tema	Eje
	29	226		Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	1. Patrones y ecuaciones	Sentido numérico y pensamiento algebraico
	30	234	Plastilina, tijeras y cuchillo de plástico	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	2. Medida	Forma, espacio y medida
	31	240	Plastilina, tijeras y cuchillo de plástico	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.		
	32	246		Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.		
	33	252		Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	3. Proporcionalidad y funciones	Manejo de la información
	34	259	Monedas y distintos tipos de dados	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	4. Nociones de probabilidad	
Prueba tipo PISA						
Ponte a prueba						

Conoce tu libro



Entrada de bloque

El libro se divide en cinco bloques; cada uno se inicia con una página doble donde se indican los temas, los aprendizajes esperados y las competencias que desarrollarás.

Activa tus competencias

Se plantea una situación en la que tendrás oportunidad de poner en juego tus conocimientos previos para resolver un problema relacionado con los contenidos que se estudiarán en el bloque.

Eje de contenido

Los contenidos del bloque se desarrollan mediante **secuencias de aprendizaje**. Al inicio de cada una se señala:

1. El tema de la lección.
2. El contenido que se estudiará.

La secuencia consta de cinco etapas que se señalan con un número y una pequeña pieza de rompecabezas (1), pues tú, junto con tus compañeros y profesor, construirás tu aprendizaje. Para su estudio, la asignatura Matemáticas se divide en tres ejes que podrás distinguir en cada bloque de estudio por su color:

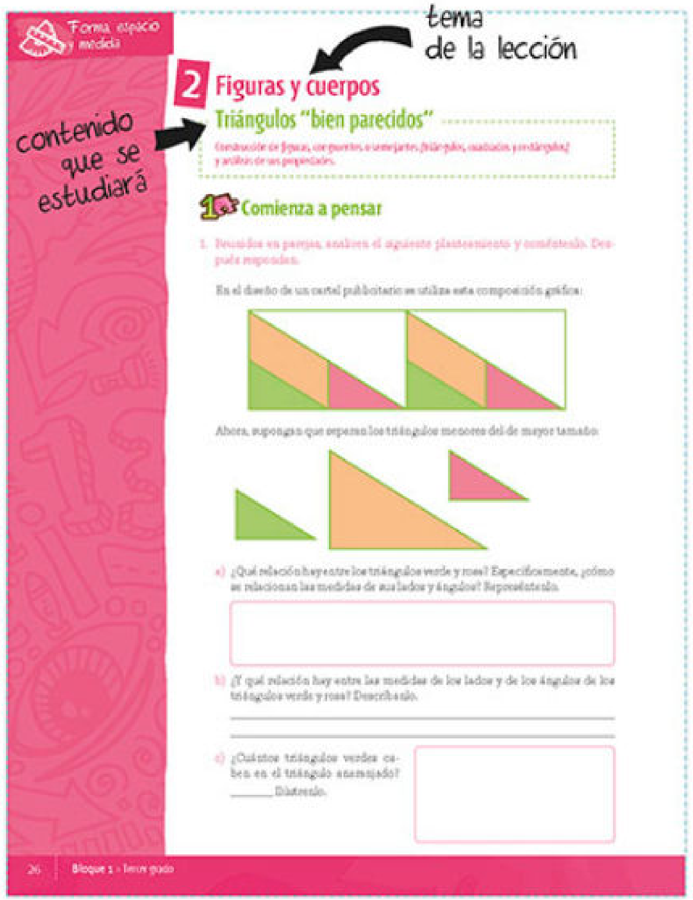
Sentido numérico y pensamiento algebraico

Forma, espacio y medida

Manejo de la información

tema de la lección

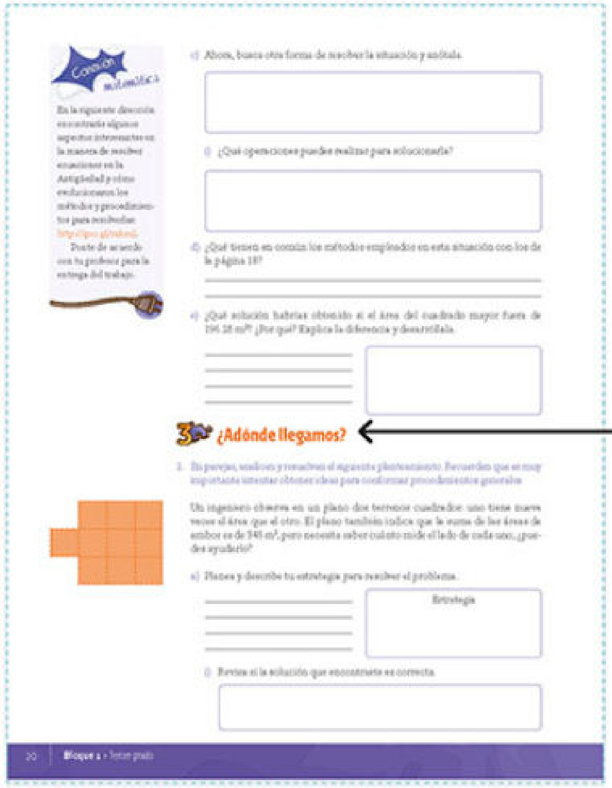
contenido que se estudiará



Secuencia de aprendizaje

Comienza a pensar. Al inicio de la secuencia se presenta una situación problemática o detonadora para que, de manera individual, explores y propongas soluciones. Esta etapa también te permitirá poner en práctica tus conocimientos previos.

Analicemos juntos. Ejercicios que te permitirán reflexionar, identificar patrones, regularidades, analogías o constituir nuevos conocimientos.



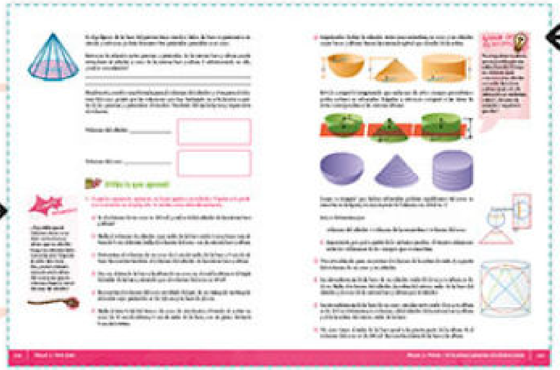
¿Adónde llegamos? En esta sección, las actividades te llevarán a reflexionar, analizar y construir tus conocimientos.

Algo por aprender. En esta sección se formalizarán las definiciones, los simbolismos y los procedimientos apoyados con ejemplos.

Utilizo lo que aprendí. Al final de la secuencia se retoma la situación problemática planteada en la sección, esta vez con ejemplos.

Secciones complementarias

Conexión matemática. Acertijos, datos curiosos o preguntas para reflexionar sobre la relación de las matemáticas con otras asignaturas y áreas del conocimiento.



Aprende de los errores. Se plantean situaciones con errores comunes. Se pretende delimitar los alcances de una herramienta o propiciar una buena interpretación de métodos y contenidos.

Aprende con la tecnología. Proponemos software que te servirá para comprobar, descubrir o redescubrir relaciones entre conceptos y procedimientos, así como vínculos a páginas de internet relacionadas con el tema en estudio.

Recordatorio. En este recuadro encontrarás información de apoyo o recordatorios acerca de temas que has estudiado en cursos anteriores.

Glosario. Definiciones de términos matemáticos o palabras de difícil comprensión, para facilitar tu estudio.

Al terminar cada bloque y al final del libro hallarás una prueba tipo **PISA** que puedes usar como evaluación final, para comprobar el desarrollo de tus competencias matemáticas a lo largo del curso.

Cada bloque se concluye con una autoevaluación que les permitirá a ti y a tu profesor saber si alcanzaste los aprendizajes esperados.

Bloque 1

Ejes temáticos	Temas	Secuencia de aprendizaje
Sentido numérico y pensamiento algebraico	1. Patrones y ecuaciones	• Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas
Forma, espacio y medida	2. Figuras y cuerpos	• Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades • Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada
Manejo de la información	3. Proporcionalidad y funciones	• Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad • Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas
	4. Nociones de probabilidad	• Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes
	5. Análisis y representación de datos	• Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio • Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Activa tus competencias

Considera los siguientes experimentos:

Experimento 1. Se lanzan al aire una moneda y un dado de 12 caras.
Experimento 2. Se meten cuerpos geométricos en una caja. Estos son: una pirámide triangular roja, un cilindro amarillo, dos esferas, una amarilla y otra verde; y tres prismas, uno hexagonal de color azul, otro pentagonal verde y el último rectangular, también verde.

Ahora considera los siguientes eventos:

Experimento 1	Experimento 2
A = {Sale cara} B = {Sale cruz} C = {Sale un número par} D = {Sale un número impar}	E1 = {Sale un prisma} E2 = {Sale una pirámide} E3 = {Sale color amarillo} E4 = {Sale color verde} E5 = {Sale un cuerpo de color rojo}

Responde:

- ¿Qué eventos son mutuamente excluyentes? ¿Cuáles independientes? ¿Y complementarios?

Escribe dos parejas de eventos que no se expresen aquí que sean mutuamente excluyentes, un par más que sea diferente e igual número para el caso de los eventos complementarios.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

1 Patrones y ecuaciones

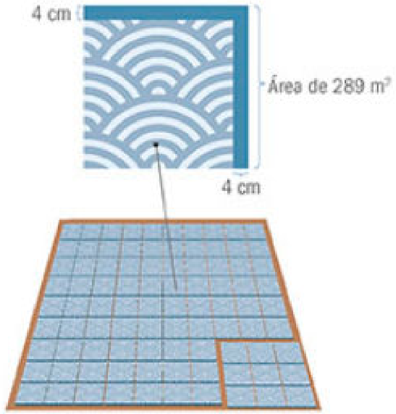
Ecuaciones cuadráticas

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

1 Comienza a pensar

1. Guiados por el maestro, discutan en grupo la siguiente situación y respondan las preguntas posteriores.

El equipo de una constructora de casas habitación cubrirá un terreno cuadrangular. La intención es cubrir la mayor parte de este con mosaicos cuadrados, como se observa en la figura. Intentan colocarlos enteros, sin fraccionar alguno, de tal modo que dos mosaicos adyacentes coincidirán totalmente en uno de sus lados. Después de tomar las medidas y hacer los cálculos, concluyeron que faltarán 4 cm por cubrir con mosaicos completos.



a) Si el área del terreno que deben cubrir los mosaicos cuadrados es de 289 m², ¿qué porción puede cubrirse con mosaicos completos? ______________

b) Si cada mosaico tiene 32 cm de lado, ¿cuántas piezas completas se utilizarán para cubrir la mayor parte del terreno? ________ ¿Cuántos tendrían que fraccionarse para la cubrir la parte restante? ________

c) Si cada caja tiene 12 mosaicos, ¿cuántas se comprarán? ______________

d) ¿Cuántos mosaicos o partes de estos sobrarán al cubrir el espacio faltante?

____

e) Propón una forma para resolver el problema, ejecútala y revisa si tu solución es la correcta:

f) Compara tu forma de resolver el problema con las de tus compañeros. Si hay métodos de resolución diferentes, encuentra similitudes y diferencias entre ellos y anótalas.

Similitudes	Diferencias

g) Si todos los métodos de resolución fueron iguales, describe otra forma de resolver el caso.

____

____

h) ¿Qué tipo de operaciones puedes emplear para resolverlo?

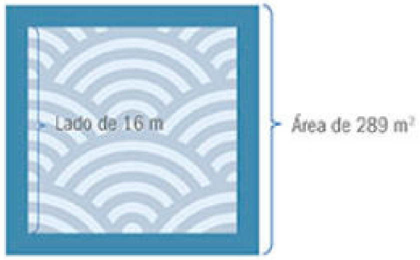
____

____

2 Analicemos juntos

1. Reúnanse en equipos, analicen y resuelvan el siguiente planteamiento.

La misma constructora del problema anterior tiene otro proyecto arquitectónico. En este caso, el terreno es de forma cuadrada con un área de 289 m² al cual se le agregan tiras rectangulares para obtener otro piso cuadrangular que mide 16 m por lado. ¿Cuál es la longitud de las tiras que se agregaron a cada lado? Haz tus operaciones en el recuadro de al lado.



a) Plantea un método para resolver el problema, desarróllalo y revisa si la solución que encontraste es correcta.

b) Compara tu método de resolución con el de tus compañeros.

i) ¿Todos encontraron la misma solución? ________ Si hay distintos, encuentra similitudes y diferencias que tienen con el tuyo y anótalas.

Similitudes	Diferencias

Conexión matemática

En la siguiente dirección encontrarás algunos aspectos interesantes en la manera de resolver ecuaciones en la Antigüedad y cómo evolucionaron los métodos y procedimientos para resolverlas: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Ponte de acuerdo con tu profesor para la entrega del trabajo.

c) Ahora, busca otra forma de resolver la situación y anótala.

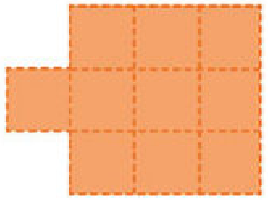
i) ¿Qué operaciones puedes realizar para solucionarla?

d) ¿Qué tienen en común los métodos empleados en esta situación con los de la página 18?

e) ¿Qué solución habrías obtenido si el área del cuadrado mayor fuera de 196.25 m^2? ¿Por qué? Explica la diferencia y desarróllala.

3 ¿Adónde llegamos?

1. En parejas, analicen y resuelvan el siguiente planteamiento. Recuerden que es muy importante intentar obtener ideas para conformar procedimientos generales.



Un ingeniero observa en un plano dos terrenos cuadrados: uno tiene nueve veces el área que el otro. El plano también indica que la suma de las áreas de ambos es de 345 m^2, pero necesita saber cuánto mide el lado de cada uno, ¿puedes ayudarlo?

a) Planea y describe tu estrategia para resolver el problema.

Estrategia

i) Revisa si la solución que encontraste es correcta.

b) Contrasta tu método para resolver el planteamiento con el que propusieron tus compañeros.

i) ¿Todos procedieron de la misma forma? _______ ¿Encontraron la misma solución? _______

ii) Si hay métodos de resolución diferentes, encuentra similitudes y diferencias entre ellos.

Similitudes	Diferencias

c) Busca otra forma de resolver el planteamiento.

i) ¿Qué operaciones puedes emplear para resolver el problema?

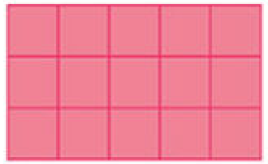
d) ¿Qué tienen en común los métodos utilizados en esta sección y los anteriores?

e) ¿Se utilizó álgebra para resolver el caso? _______ ¿Cómo? Escríbelo.

Glosario

Álgebra. Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita. Etimológicamente, proviene del latín tardío *algĕbra*, y este a su vez del árabe clásico *alǧ abru* [*walmuqābalah*] que significa "reducción", una cirugía con la cual se reducen los huesos luxados o fraccionados. Incluso, un algebrista era el médico que practicaba este tipo de operaciones. (Tomado de http://dle.rae.es/; consultado el 2 de diciembre de 2016).

2. Analiza el siguiente caso y contesta las preguntas posteriores. Pide ayuda a tu profesor y, al final, obtengan retroalimentación en sesión grupal.



Hay un rectángulo que se forma con cuadrados; si se emplean 15 cuadrados para formarlo y el área del rectángulo es 4 335 m^2...

a) ¿Puede formarse un rectángulo con los 15 cuadrados? Traza y colorea todas las posibilidades que halles en una hoja tamaño doble carta, la cual puedes formar uniendo dos hojas carta con cinta adhesiva. Por último, intercámbienlas, compárenlas y exhíbanlas.

b) ¿Cuánto mide el lado de cada cuadrado con los que se forma el rectángulo?

c) ¿Vale la pena preguntar por la medida del largo y ancho del rectángulo? _______ ¿Por qué? _______

Algo por aprender

Con las actividades anteriores, tú:

- encontraste un número que elevado al cuadrado dio cierto resultado. Por ejemplo, una expresión para ello es $x^2 = 49$.
- determinaste el valor de un número al sumar o restar a su cuadrado un resultado. Como ejemplo, la expresión que lo representa es $x^2 + 5 = 30$.
- hallaste el valor al sumar o restar números y elevar el resultado al cuadrado, éste sea igual a cierto número. Dicha operación se expresa como $(x + 4)^2 = 36$.

Las expresiones ejemplificadas anteriormente te dan una idea de cómo resolver un problema mediante cálculos aritméticos que dependen del análisis de la operación que se indica. Todas ellas son **ecuaciones cuadráticas**. Por definición, se trata de una expresión que obedece a un polinomio de la forma $ab^2 + bx + c = 0$, donde el coeficiente a es necesariamente diferente de 0 y cuyo mayor exponente es dos, cuando se han reducido todos los términos semejantes.

1. Guiados por su profesor, respondan, comenten y obtengan retroalimentación.
   a) Si $x^2 = 49$, ¿qué valor tendría x para que la igualdad fuera cierta? __________
      i) ¿Cuál fue el procedimiento para encontrar el valor de x? __________
   b) Ahora, si la ecuación cuadrática es $x^2 + 5 = 30$, ¿de qué forma puede resolverse? Formúlalo.
      i) ¿Cómo hallaron el valor de x?
   c) En el caso de tener la ecuación $(x + 4)^2 = 36$, ¿cómo puede reducirse a la forma del primer caso? Registra las operaciones y tras deliberar en grupo anota la respuesta correcta.
      i) En este tercer caso, ¿cómo se encontró el valor de x?

2. Ahora es el momento de que practiques solo. Como primer paso, analiza lo siguiente y transcríbelo a tu cuaderno para que te sirva de repaso en otros momentos de tu tercer grado.

   Considera la ecuación $(x - 5)^2 + 7 = 23$

¿De qué manera puede simplificarse para dejar sola a la x? Hagámoslo:

- Primero restamos 7 unidades en cada lado de la igualdad, lo que reduce la ecuación original a $(x - 5)^2 = 16$
- Ahora, para que el cuadrado de un número sea 16, ese valor, a saber $(x - 5)^2$, tiene que ser −4 o 4. Así, tenemos dos posibilidades:

Opción 1	Opción 2
$x - 5 = 4$	$x - 5 = 4$
$x - 5 + 5 = -4 + 5$	$x - 5 + 5 = 4 + 5$
$x = 1$	$x = 9$

Finalmente, observa el siguiente caso:

Para separar la x del resto de la ecuación, primero hay que quitar el 2:	$2(x + 7) - 6 = 156$	
Para eliminar el 2 se divide entre este número cada lado de la igualdad:	$\frac{2(x + 7)^2 - 6}{2} = \frac{156}{2}$	
Así resulta una ecuación equivalente y más fácil de resolver:	$(x + 7)^2 - 3 = 78$	
Para eliminar el −3 se suman tres unidades a ambos lados de la igualdad:	$(x + 7)^2 - 3 + 3 = 78 + 3$	
El cuadrado de un número es 81 sólo si es igual a −9 y 9	$(x + 7)^2 = 81$	
Se analizan los dos casos posibles:	$x + 7 = -9$ $x + 7 - 7 = -9 - 7$	$x + 7 = 9$ $x + 7 - 7 = 9 - 7$
Y se obtienen dos soluciones:	$x = -16$	$x = 2$

3. Llegó el momento de resolver. Al término, propón a tu profesor una revisión grupal para comparar tus resultados con los de tus compañeros.
   a) Con base en el ejemplo anterior, explica el procedimiento de simplificación de la siguiente ecuación hasta llegar a conocer el valor de x.

$5(x - 1)^2 - 7 = 20$		
$\frac{5(x + 1)^2 - 7}{5} = \frac{20}{5}$		
$(x + 1)^2 - \frac{7}{5} = 4$		
$(x + 1)^2 - \frac{7}{5} + \frac{7}{5} = 4 + \frac{7}{5}$		
$(x + 1)^2 = \frac{27}{5}$		
$x - 1 \approx -2.32$	$x - 1 \approx 2.32$	
$x - 1 + 1 \approx -2.32 + 1$	$x - 1 + 1 \approx -2.32 + 1$	
$x \approx -1.32$	$x \approx 3.32$	

4. Regresemos al análisis. En parejas, analicen los siguientes procedimientos.

a) La particularidad de los siguientes casos es que pueden seguirse parcialmente pero no resolverse.

i) Completen el siguiente desarrollo.

$$(x-1)^2-2=-3$$
$$(x-1)^2-2+2=-3+2$$
$$(x-1)^2=-1$$

____

ii) ¡Ya no se puede seguir! ¿Por qué suponen que es así? Escríbanlo.

____

____

b) Reflexionen otro caso y describan cada paso del proceso.

$$(x-3)^2+2=2$$ ______________
$$(x-3)^2+2-2=2-2$$ ______________
$$(x-3)^2=0$$ ______________
$$x-3=0$$
$$x=3$$

i) ¿Puede resolverse? _______ ¿Por qué? ______________

____

ii) En este último proceso, ¿crees que pueden reemplazarse uno o más valores para que pueda despejarse la x? _______ ¿Cómo? ¡Inténtalo!

Aprende con tecnología

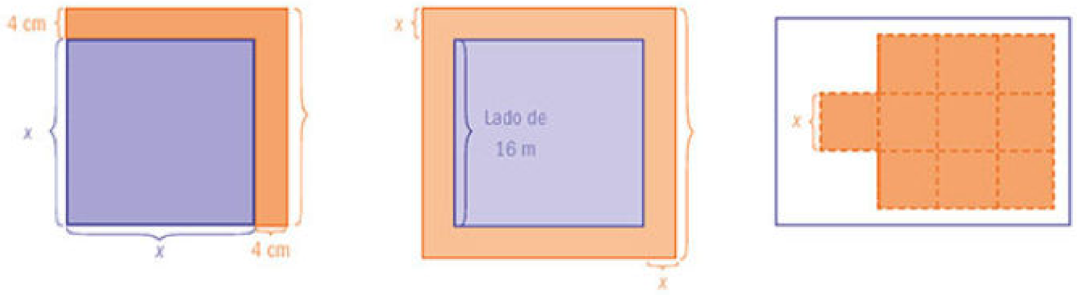
En la siguiente página electrónica encontrarás un solucionador de ecuaciones cuadráticas con el que podrás comprobar tus resultados: http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas-solucionador.html

Y en esta otra podrás leer conceptos y seguir variados ejemplos sobre este tipo de ecuaciones para reforzar los conocimientos que adquiriste en el aula: www.vitutor.com/ecuaciones/2/2_e.html (consultado el 2 de diciembre de 2016).

5 Utilizo lo que aprendí

1. Con lo aprendido anteriormente, retomen las actividades de la sección inicial. Formen equipos para resolverlas, debatirlas y obtener retroalimentación.

a) Encuentra el valor de la incógnita x en cada figura.



b) ¿Qué concluirías respecto al método que utilizaste al principio de la secuencia y al que aprendiste después?

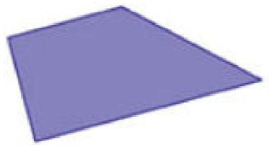
____

____

____

2. Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno. Analiza y comparte tus procedimientos de resolución con el resto de la clase.

a) La edad de Diana hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años. ¿Cuál es su edad actual?
b) Vanessa compró juguetes para sus sobrinos. Lo que pagó fue exactamente el doble de la cantidad de artículos que adquirió: $1 600. Entonces, ¿cuántos de estos compró?
c) Encuentra el número positivo al que si les restas 7 y lo elevas al cuadrado, da como resultado 49.
d) Enrique tiene un terreno cuadrado y su área es de 159 m². ¿Cuánto tendría que disminuir cada lado para que el área fuera de 129 m²?
e) Matías cercará un terreno en forma de trapecio recto en el cual la base mayor es el doble de la menor y la altura es de igual longitud que esta última. Si el área del terreno es de 361 cm², ¿cuáles son las dimensiones del trapecio?
f) La base de un triángulo es cinco veces la altura. Si el área de la figura es de 441 cm², encuentra las dimensiones de este y dibuja 5 triángulos más que con esa característica.



3. Resuelve las siguientes ecuaciones en tu cuaderno.

$x^2=121$	$x^2+9=90$	$(x-3)^2=49$
$x^2=289$	$x^2+13=209$	$(x+8)^2=64$
$x^2=361$	$x^2+25=27$	$(x-12)^2=256$
$x^2=457$	$x^2+12=144$	$(x+4)^2=-36$
$x^2=-25$	$x^2+12=10$	$-(x+3)^2=49$

2 Figuras y cuerpos

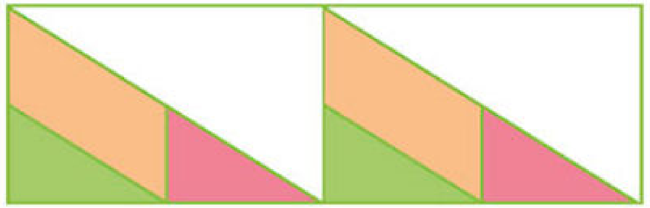
Triángulos "bien parecidos"

Construcción de figuras, congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

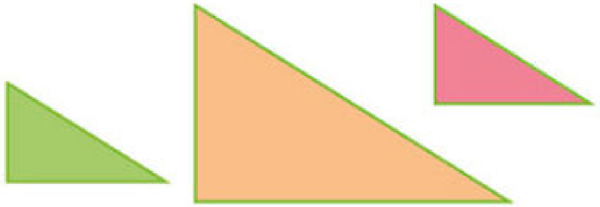
Comienza a pensar

1. Reunidos en parejas, analicen el siguiente planteamiento y coméntenlo. Después respondan.

En el diseño de un cartel publicitario se utiliza esta composición gráfica:



Ahora, supongan que separan los triángulos menores del de mayor tamaño:

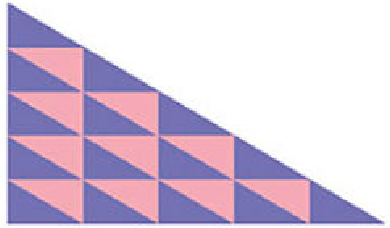


a) ¿Qué relación hay entre los triángulos verde y rosa? Específicamente, ¿cómo se relacionan las medidas de sus lados y ángulos? Represéntenlo.

b) ¿Y qué relación hay entre las medidas de los lados y de los ángulos de los triángulos verde y rosa? Descríbanlo.

c) ¿Cuántos triángulos verdes caben en el triángulo anaranjado? ______ Ilústrenlo.

d) Ahora analicen este diseño en el cual se insertan varios triángulos rosas en el azul.



e) ¿Cómo se relacionan las medidas de los ángulos y lados de los triángulos rosas con los del azul? Ilústrenlo.

Analicemos juntos

1. Guiados por su profesor, analicen en grupo y resuelvan las siguientes actividades.

a) Dibujen un triángulo equilátero que tenga 5 cm de longitud en cada lado.

i) ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos? Argumenta tu respuesta.

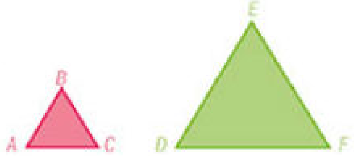
b) Analicen si hay alguna manera de utilizar el triángulo anterior –recortado, calcado varias veces, entre otras posibilidades– para construir otro triángulo del mismo tipo, pero cuyos lados midan 8 cm cada uno.

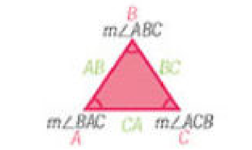
i) Describan un procedimiento para hacerlo.

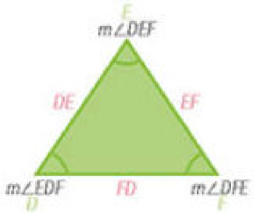
ii) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del nuevo triángulo? Argumenta tu respuesta.

2. En parejas, lean y comenten lo siguiente.

Los vértices del primer triángulo se designan con las letras *A*, *B* y *C*, y las de los vértices del segundo triángulo son *D*, *E*, y *F*.







Pueden referirse a los dos triángulos con la notación ΔABC y ΔDEF. Asimismo, las longitudes de los lados del primero serán AB, BC y CA, y las del segundo se representarán por DE, EF y FD. En cuanto a las medidas de los ángulos, las del primero serán $m\angle ABC$, $m\angle ACB$ y $m\angle BAC$; y las del segundo serán: $m\angle DEF$, $m\angle DFE$ y $m\angle EDF$.

3. Ahora respondan. No olviden preguntar a su profesor las dudas que surjan.

a) Completen la siguiente tabla.

ΔABC	ΔDEF
Longitud de los lados:	Longitud de los lados:
AB = ______ BC = ______	DE = ______ EF = ______
CA = ______	FD = ______
Medidas de los ángulos:	Medidas de los ángulos:
$m\angle ABC$ = ______ $m\angle ACB$ = ______	$m\angle DEF$ = ______ $m\angle DFE$ = ______
$m\angle BAC$ = ______	$m\angle EDF$ = ______

b) Escriban los resultados de los siguientes cocientes:

$\frac{AB}{DE} =$ ☐ $\frac{BC}{EF} =$ ☐ $\frac{CA}{FD} =$ ☐

i) Si los cocientes se invierten, ¿qué resultados tendrás?

$\frac{DE}{AB} =$ ☐ $\frac{EF}{BC} =$ ☐ $\frac{FD}{CA} =$ ☐

ii) Expliquen y representen qué significa el resultado de los cocientes entre las longitudes de los lados de un triángulo respecto al otro.

____

____

____

____

4. ¿Listo para practicar solo? No olvides preguntar a tu profesor las dudas que surjan.

a) Dibuja un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales midan 3 cm.

i) ¿Cuánto deben medir los ángulos de este triángulo? Arguméntalo.

____

____

____

b) Utiliza el triángulo que dibujaste para construir otro triángulo rectángulo y un isósceles en el cual la longitud de los lados iguales sea 7 cm.

i) Describe o ilustra un procedimiento para hacerlo.

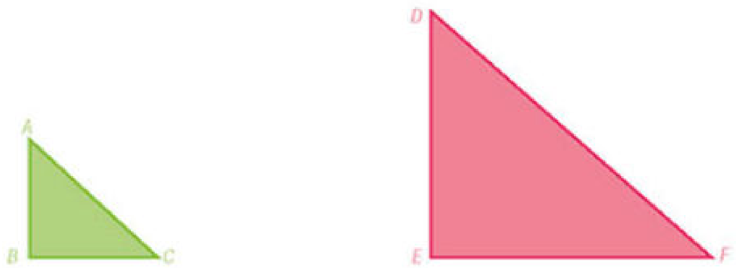
ii) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del nuevo triángulo? Argumenta.

____

____

____

c) Si se usan las mismas letras que en el inciso anterior para referirnos a los vértices de los triángulos de este inciso, y aunque pueden utilizarse otras, tendremos una situación como la siguiente: $m\angle EDF$



i) Con estas acotaciones, completa la siguiente tabla. En caso necesario, toma medidas directamente en la figura:

ΔABC	ΔDEF
Longitud de los lados:	Longitud de los lados:
AB = ______ BC = ______	DE = ______ EF = ______
y CA = ______	y FD = ______
Medidas de los ángulos:	Medidas de los ángulos:
$m\angle ABC$ = ______ $m\angle ACB$ = ______	$m\angle DEF$ = ______ $m\angle DFE$ = ______
$m\angle BAC$ = ______	$m\angle EDF$ = ______

d) Escribe los resultados de los siguientes cocientes:

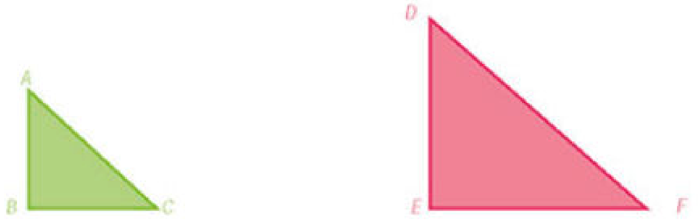
$\frac{AB}{DE} =$ ☐ $\frac{BC}{EF} =$ ☐ $\frac{CA}{FD} =$ ☐

i) Si los cocientes se invierten, ¿cuál será el resultado de cada caso?

$\frac{DE}{AB} =$ ____ $\frac{EF}{BC} =$ ____ $\frac{FD}{CA} =$ ____

ii) ¿Puedes afirmar que hay proporcionalidad entre los lados de los triángulos? ______ ¿Por qué? ______

iii) ¿Cualquier combinación de letras puede dar el mismo resultado? ______ ¿Por qué? ______



5. Es el momento de hacer la actividad en grupo. Pidan a su profesor que guíe la sesión y recuerden la importancia de obtener retroalimentación.

a) Discutan qué sucede si las letras de los vértices se cambian de lugar, pero se usan las mismas relaciones. Anota las conclusiones a las que llegaron.

______

b) Basados en el inciso anterior, completen la siguiente tabla:

ΔABC	ΔDEF
Longitud de los lados: $AB =$ ______ $BC =$ ______ $CA =$ ______	Longitud de los lados: $DE =$ ______ $EF =$ ______ $FD =$ ______
Medidas de los ángulos: $m\angle ABC =$ ______ $m\angle ACB =$ ______ $m\angle BAC =$ ______	Medidas de los ángulos: $m\angle DEF =$ ______ $m\angle DFE =$ ______ $m\angle EDF =$ ______

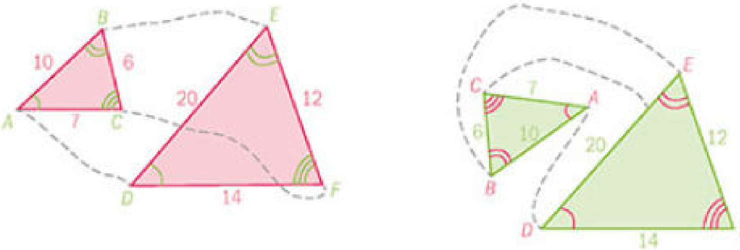
$\frac{AB}{DE} =$ ____ $\frac{BC}{EF} =$ ____ $\frac{CA}{FD} =$ ____

$\frac{DE}{AB} =$ ____ $\frac{EF}{BC} =$ ____ $\frac{FD}{CA} =$ ____

3 ¿Adónde llegamos?

1. Reúnanse en equipos y lean la siguiente información.

Cuando analizas las relaciones entre longitudes de lados y medidas de ángulos de dos triángulos con la misma forma, pero distinto tamaño, puedes establecer longitudes de los lados de uno de ellos, conociendo las del otro. También puedes obtener las medidas de los ángulos de uno de los triángulos conociendo las del otro, siempre y cuando haya proporcionalidad entre las longitudes de sus lados a partir de una correspondencia entre vértices. Por ejemplo:



Sin importar la posición de los triángulos, podemos establecer una correspondencia entre los vértices que permita seguir ordenadamente la relación entre las longitudes de lados y las medidas de los ángulos.

2. Analicen y resuelvan los planteamientos expuestos a continuación.

a) Con lo que ahora saben, escribe los resultados de los siguientes cocientes:

$\frac{AB}{DE} =$ ____ $\frac{BC}{EF} =$ ____ $\frac{CA}{FD} =$ ____

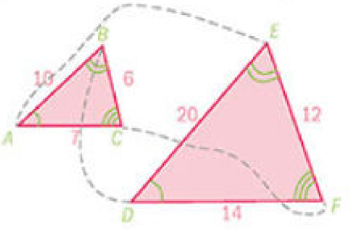
i) Si los cocientes se invierten, ¿cuál será el resultado en cada caso?

$\frac{DE}{AB} =$ ____ $\frac{EF}{BC} =$ ____ $\frac{FD}{CA} =$ ____

ii) Escribe la relación entre las medidas de los ángulos correspondientes:

$m\angle ABC =$ ______ $m\angle ACB =$ ______ $m\angle BAC =$ ______

b) ¿Podrá funcionar una correspondencia de vértices como la siguiente?



i) Expliquen su respuesta.

______

Triángulos como los anteriores se llaman triángulos semejantes.

Aprende con tecnología

Para conocer más sobre la propiedad de las figuras geométricas, puedes usar el programa "Geogebra", el cual puedes hallar y descargar en internet. http://www.geogebra.org/cms/es/download (consultado el 2 de diciembre de 2016).

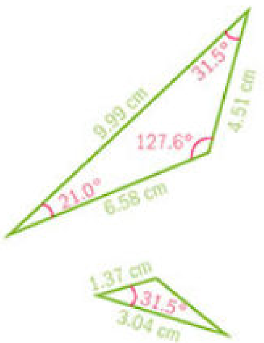
Glosario

Triángulos semejantes. Se trata de dos triángulos que tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño. Cuando dos triángulos son de este tipo, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados, también correspondientes, son proporcionales en medida.

(Disponible en: http://goo.gl/SCLek (consultado el 2 de diciembre de 2016).

3. Guiados por el profesor, lean y contesten lo siguiente.

a) Supón que solamente tienes dos triángulos y faltan medidas en uno de ellos. ¿Puedes encontrarlas? Inténtalo en el siguiente caso:



i) Encuentra las medidas que faltan en el triángulo pequeño y discute con tus compañeros la manera de hallarlas. Anota los resultados que obtuvieron.

____

____

ii) ¿Qué sucederá con la longitud de los lados y las medidas de los ángulos de cuadrados o rectángulos semejantes? ____________________

____

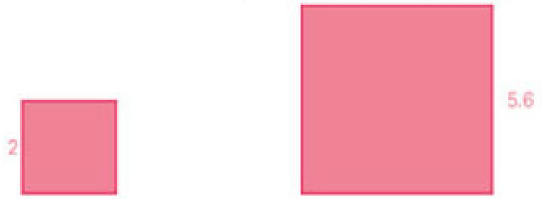
iii) ¿Cómo se puede establecer la relación de proporcionalidad entre la longitud de sus lados y la igualdad de las medidas de sus ángulos?

____

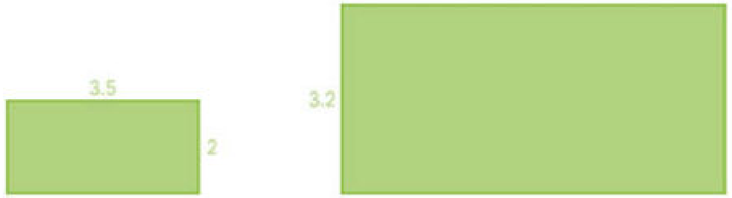
____

b) Debate con tus compañeros y determina la medida de los lados y ángulos en los siguientes pares de figuras

¿Cuánto debe medir este lado? ______



¿Cuánto debe medir este lado? ______



4. Guiados por el profesor, reflexionen sobre estas relaciones y su utilidad en distintas profesiones. Tras la retroalimentación, registra en tu cuaderno las conclusiones que establecieron.

Aprende con tecnología

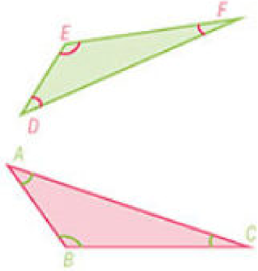
En la siguiente dirección electrónica encontrarás conceptos, ejemplos y ejercicios que te ayudarán a practicar la semejanza de triángulos:
http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=133235
(consultado el 2 de diciembre de 2016).

Junto con tus compañeros, propón a tu profesor extraer una breve guía de ejercicios y resolverlos en el salón de clase.

Conexión matemática

La semejanza de triángulos sirve para establecer mediciones indirectas con diversos dispositivos. Busca el funcionamiento de dispositivos como el astrolabio o el aparato que usan los topógrafos.

Algo por aprender



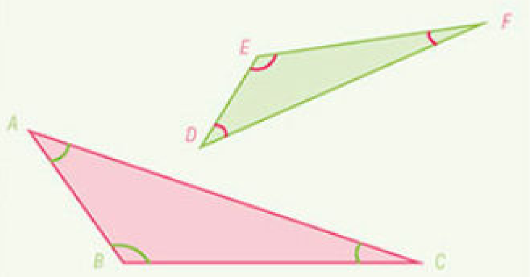
Dos triángulos son semejantes cuando, después de establecer una correspondencia entre sus vértices, las longitudes de sus lados y medidas de ángulos correspondientes son proporcionales e iguales.

A los lados correspondientes que permiten establecer la proporcionalidad entre ellos se les denomina **lados homólogos** y las parejas de ángulos con las mismas medidas son **ángulos congruentes**. Veamos:

ΔABC	ΔDEF
Correspondencia entre vértices: A con D B con E C con F	
Lados correspondientes u homólogos (o segmentos de los triángulos homólogos): AB con DE BC con EF CA con FD	
Longitudes de pares de lados homólogos: AB y DE BC y EF CA y FD	
Proporcionalidad de longitudes de los lados homólogos $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ (también se puede establecer así: $\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}$)	
Igualdad de las medidas de los ángulos: $m\angle ABC = m\angle DEF$, $m\angle ACB = m\angle DFE$ y $m\angle BAC = m\angle EDF$	
Ángulos congruentes (para indicarlo se usa el símbolo ≅): $m\angle ABC \cong m\angle DEF$, $m\angle ACB \cong m\angle DFE$ y $m\angle BAC \cong m\angle EDF$	

Si el número k es resultado de los cocientes $\frac{AB}{DE}=k\ \frac{BC}{EF}=k\ \frac{CA}{FD}=k$, corresponde a la **constante de proporcionalidad**. Si los lados homólogos tienen la misma longitud se denominan **triángulos congruentes**. Además, a los lados y ángulos correspondientes se les denomina **lados congruentes** (los que tienen la misma longitud) y **ángulos congruentes** (cuando ángulos son iguales).

ΔABC	ΔDEF	
Correspondencia entre vértices:		
A con D	B con E	C con F
Pares de lados congruentes:		
$AB \cong DE$	$BC \cong EF$	$CA \cong FD$
Ángulos congruentes:		
$\angle ABC \cong \angle DEF$,	$\angle ACB \cong DFE$ y	$\angle BAC \cong \angle EDF$



Aprende de los errores

Si un compañero afirma que cualquier tipo de correspondencia entre los vértices de dos triángulos semejantes puede servir para establecer la proporcionalidad entre los lados, ¿dirías que es correcto? Explica tu respuesta.

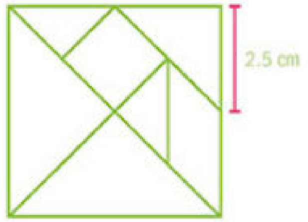
¿Habrá algún tipo de triángulo para el que esta afirmación sea cierta? ¿Por qué?

Es fundamental que la correspondencia entre vértices sea consistente con las partes homólogas o congruentes; no siempre cualquier correspondencia entre vértices es adecuada para establecer la semejanza o congruencia de triángulos.

Utilizo lo que aprendí

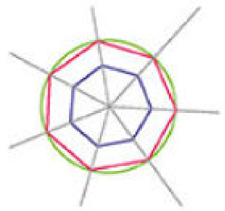
1. Transcribe en tu cuaderno los siguientes ejercicios y resuélvelos. Posteriormente, guiados por el profesor, debatan sus respuestas en el aula.

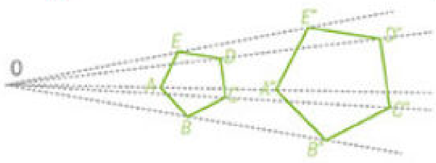
a) El rompecabezas tangram está formado por las siguientes piezas:

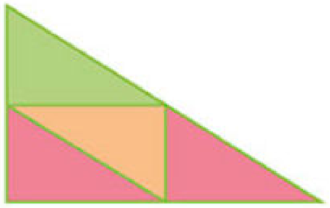


i) Adquiere cartoncillo y construye un tangram de 7 centímetros de longitud en la parte donde el diagrama indica que tiene 2.5 cm. Puedes decorarlo y conservarlo, ya que es un juego tan útil como divertido.

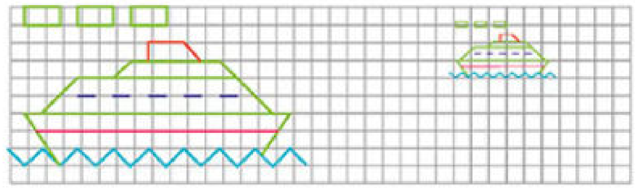
b) Explica por qué estas construcciones permite armar polígonos semejantes.

i) 

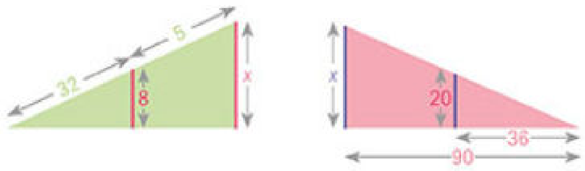
ii) 

iii) 

c) Utiliza papel cuadriculado para hacer una figura semejante a la siguiente y otórgale los valores de proporcionalidad correspondientes.



d) Calcula el valor del lado marcado con la letra x.

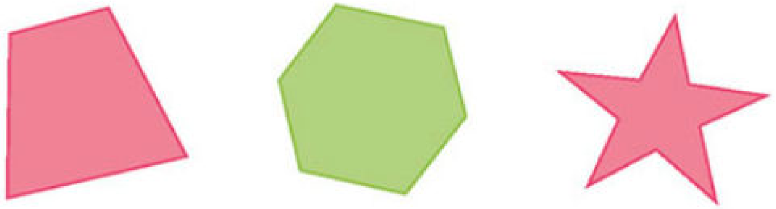


e) Si se establece la semejanza entre dos triángulos y se obtiene: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = 8$ al invertir los cocientes de lados homólogos, ¿cuál es el resultado? __________

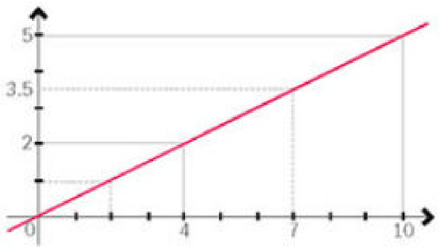
f) Cuando los cocientes de lados correspondientes son: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = 1$ ¿De qué tipo de triángulos se trata? __________

g) Traza una figura congruente y otra semejante a cada uno de los siguientes polígonos, que correspondan con las constantes de proporcionalidad dadas.

i) $k = 3$ ii) $k = .25$ iii) $k = 1$



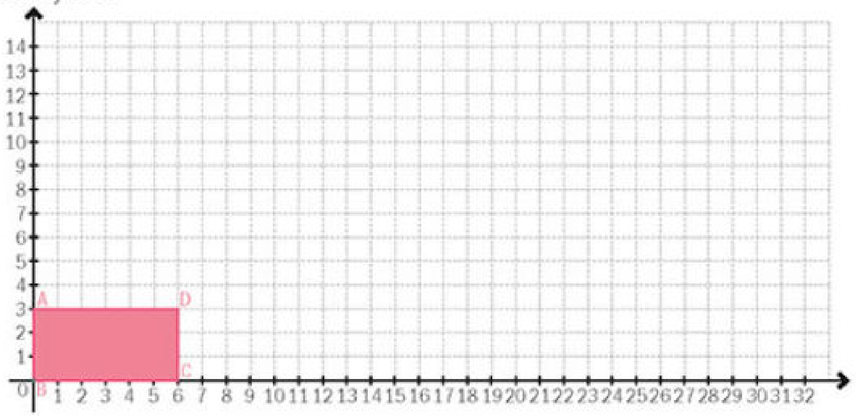
h) Para la siguiente figura:



i) Establece la constante de proporcionalidad en los rectángulos de la siguiente figura con respecto al rectángulo más pequeño.

ii) Respecto al rectángulo más pequeño traza rectángulos en los cuales las constantes de proporcionalidad sean: $k = 3$, 4 y 0.5.

iii) En una cuadrícula con ejes cartesianos como la siguiente traza varios rectángulos semejantes que tengan dos de sus lados en los ejes de coordenadas; es decir, un vértice debe ser el origen de coordenadas, otros dos estarán en cada uno de los ejes. Explica en tu cuaderno si el cuarto vértice guardará una posición especial considerando el resto de los rectángulos semejantes.



Los congruentes están entre los semejantes

Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Comienza a pensar

1. Individualmente, analicen el siguiente planteamiento y coméntenlo en sesión grupal guiados por el profesor. Después responde.

Andrés es diseñador de interiores y para decorar una pared elaboró un boceto con triángulos de la misma forma y tamaño; además, planea realizarlos en diferentes colores y texturas. Solicitó ayuda a un compañero de trabajo para cortar los triángulos de distintos materiales. En total son 6 medidas: 3 longitudes de los lados y 3 medidas de los ángulos.

a) ¿Las medidas que le dio Andrés a su compañero son suficientes para construir el triángulo? _______ ¿Se deben usar todas al mismo tiempo o pueden omitirse algunas? ________________ ¿Por qué? ______________________

____

2. Repite el ejercicio anterior, ahora con los siguientes datos.

a) Considera los datos de medidas de lados y ángulos del siguiente triángulo. Después, trázalo y explica tu razonamiento.

3. Resuelve los siguientes ejercicios. Discute tus respuestas en pareja.

a) Analicen si en cada uno de los siguientes casos es posible reproducir el triángulo con los datos que se proporcionan o sólo se obtiene un triángulo semejante. Represéntalo gráficamente en el espacio correspondiente.

Aprende con tecnología

Para conocer varios aspectos sobre la semejanza y congruencia de triángulos mediante animaciones, que te servirán para reforzar tu dominio sobre el tema, explora la página de internet:

http://www.jorge-fernandez.es/proyectos/angulo/temas/temad/index.html

Y a manera de síntesis, explorar otros conceptos y ejemplos de este tema y complementar lo aprendido en el aula, visita:

http://www.ecured.cu/index.php/Semejanza_de_Tri%C3%A1ngulos

(consultados el 2 de diciembre de 2016).

b) Dibuja un triángulo que tenga el doble de longitud en cada lado del triángulo de la actividad anterior y analiza cómo reproducirlo si te proporcionan sólo algunas medidas del triángulo original.

c) Con base en el inciso anterior, considera los siguientes casos, represéntalos y anota tus conclusiones.

i) La longitud de los tres lados del triángulo chico.

ii) La longitud de dos lados del triángulo chico y la medida de uno de los ángulos.

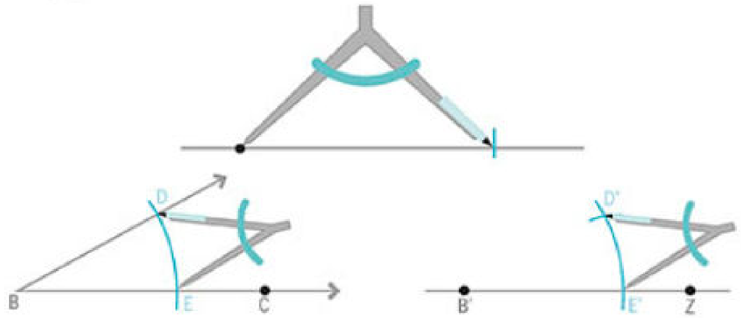
iii) La longitud de un lado del triángulo chico y las medidas de dos ángulos.

iv) Sólo las medidas de los ángulos.

Analicemos juntos

1. En grupo y coordinados por el profesor, analicen la siguiente información y coméntenla.

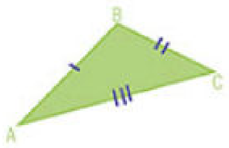
a) ¿Podrías utilizar regla y compás para copiar los lados y ángulos de un triángulo? Observen las siguientes figuras y descubran cuáles son los pasos que hay que llevar a cabo.



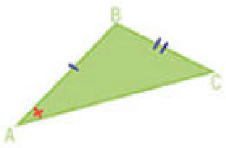
2. Ahora, individualmente, responde los siguientes casos. No olvides aclarar las dudas con tu profesor.

a) Dados los siguientes triángulos, en una hoja tamaño media carta o en la mitad de una cartulina reproduce los lados o ángulos indicados con una marca e intenta completar la figura y comprobar si lograste construir un triángulo congruente.

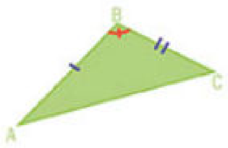
i)



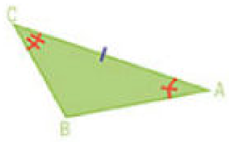
ii)



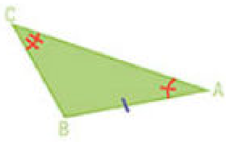
iii)



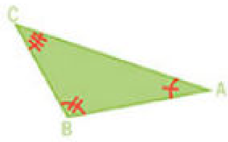
iv)



v)



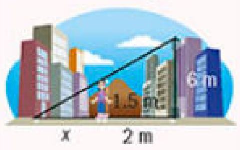
vi)



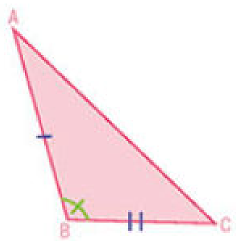
b) De la misma forma, dados los siguientes triángulos, considera las partes marcadas y reproduce los lados utilizando el valor de la constante de proporcionalidad (k) indicada, conservando la medida de los ángulos. Intenta completar la figura y comprueba si construiste un triángulo semejante.

Conexión matemática

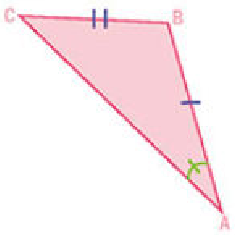
Desde la Antigüedad la semejanza de triángulos se utilizó para medir longitudes mediante la comparación. Es útil para calcular distancias de manera indirecta, a partir de la sombra que proyecta un objeto de gran tamaño con otro de menor tamaño, del cual pueden medirse físicamente sus longitudes. Por ejemplo, la comparación de la sombra de un edificio, a partir de la sombra de un árbol y sus respectivas alturas, como se muestra en la figura:



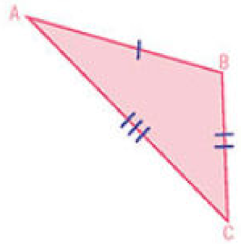
i) $k = 2$



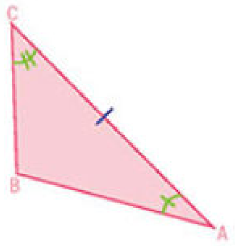
ii) $k = 5$



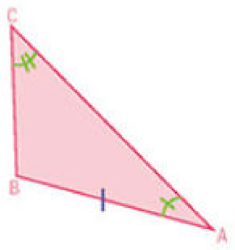
iii) $k = 4$



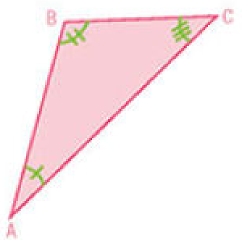
iv) $k = 3$



v) $k = 0.5$



vi) $k = 0.25$



c) Resume en qué casos es posible, a partir de algunas medidas de lados o ángulos, construir triángulos congruentes o semejantes.

____

____

3 ¿Adónde llegamos?

1. Agrúpense en tríos y guiados por el profesor trabajen el caso expuesto a continuación y respondan en sus cuadernos las preguntas posteriores. Necesitarán una caja de palillos.

   a) Utilicen los palillos para construir triángulos y analizar sus relaciones. Para cada figura que formen de acuerdo con las siguientes indicaciones, determinen:

      i) ¿Cuántos triángulos se pueden construir?

      ii) Si pueden construirse más de uno, ¿son congruentes o semejantes?

      iii) Explica tus respuestas.

      - Con tres palillos
      - Con cuatro palillos
      - Con cinco palillos
      - Con seis palillos
      - Con siete palillos
      - Con ocho palillos
      - Con nueve palillos

   b) ¿Qué condición se debe cumplir para construir el triángulo con los palillos?

____

____

2. En casa, haz la siguiente actividad y después registra tus reflexiones.

   a) ¿Será posible construir un triángulo cuyos lados tengan las medidas que se indican en cada inciso? Inténtalo; utiliza materiales como popotes, palitos de paleta o cualquier otro que se te ocurra.

      i) 3 cm; 4 cm y 5 cm
      ii) 4 cm; *EF*, 5 cm y 10 cm
      iii) 5 cm; *EF*, 7 cm y 5 cm
      iv) 8 cm; *EF*, 3 cm y 4 cm

      - ¿Qué tipo de relaciones observaste entre algunos de estos triángulos?

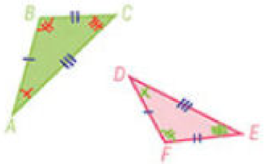
      ____

      - ¿Qué correspondencia tiene esta actividad con las efectuadas en las secciones anteriores? Escribe tus conclusiones.

      ____

4 Algo por aprender

Cuando dos triángulos son congruentes es necesario revisar seis igualdades: tres relacionadas con la longitud de los lados correspondientes y otras tres con las medidas de los ángulos correspondientes.



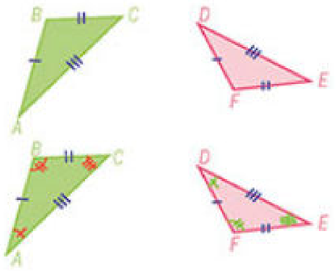
A con D AB = DF m<ABC = m<DFE
B con F BC = FE m<BCA = m<FED
C con E CA = ED M<CAB = M<EDF

Con las actividades anteriores constataste que no es necesario revisar las 6 igualdades de medidas; basta con revisar 3, a las cuales se les denomina por un nombre que recuerda los lados y ángulos considerados.

Criterios de congruencia de triángulos

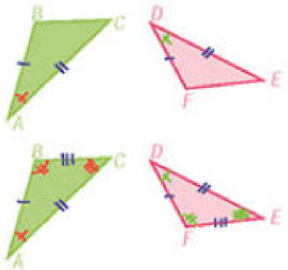
Triángulos *LLL*

Si después de establecer la correspondencia entre los vértices las longitudes de los lados correspondientes son iguales, sin necesidad de que los ángulos correspondientes también sean iguales y, por tanto, los triángulos serán congruentes:



Correspondencia de vértices *A* con *D*, *B* con *F* y *C* con *E*.
Se cumple que:
AB = *DF*, *BC* = *FE*, *CA* = *ED*
Se concluye que:
m<ABC = m<DFE, m<BCA = m<FED, M<CAB = M<EDF

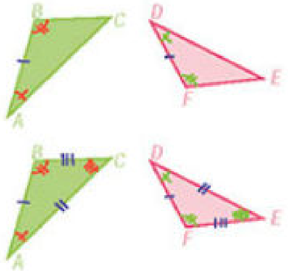
Triángulos *LAL*



Correspondencia de vértices:
A con *D*, *B* con *F* y *C* con *E*
Se cumple que:
$AB = DF$, $CA = ED$, $M<CAB = M<EDF$
Se concluye que:
$m<ABC = m<DFE$, $m<BCA = m<FED$
y $BC = FE$

Si el ángulo de un triángulo tiene la misma medida que el ángulo correspondiente de otro y los lados correspondientes de los triángulos son iguales, entonces los dos triángulos son congruentes (esto coincidirá en las medidas de las partes faltantes).

Triángulos *ALA*



Correspondencia de vértices:
A con *D*, *B* con *F* y *C* con *E*
Se cumple que:
$AB = DF$, $m<ABC = m<DFE$
y $M<CAB = M<EDF$
Se concluye que:
$m<BCA = m<FED$, $BC = FE$ y $CA = ED$

Si el lado de un triángulo tiene la misma medida que el lado correspondiente de otro y los ángulos correspondientes de los triángulos son iguales, entonces los dos triángulos son congruentes (esto coincidirá en las medidas de las partes faltantes).

1. Con base en lo anterior, analiza, responde y comparte tus conclusiones con el grupo.

   a) ¿Podrían ser válidos criterios como *ALL*, *LLA*, *AAL* o *LAA*, aunque sea para cierto tipo de triángulos? ______ Explica tu respuesta: ________________

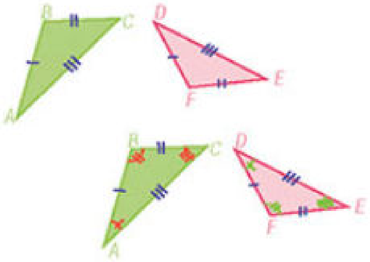
      i) ¿Se establecerían criterios de semejanza? ________________

   b) Analiza con tus compañeros la validez de los siguientes criterios.

Criterios de semejanza de triángulos

Triángulos *LLL*

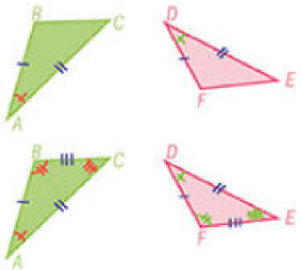
Una vez que se ha establecido una correspondencia entre los vértices de dos triángulos, si las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales, de acuerdo con una constante de proporcionalidad *k*, ¿se puede asegurar que las medidas de los ángulos correspondientes también serán iguales y por tanto los triángulos serán semejantes? Observa la siguiente figura y discútanlo en sesión grupal.



Correspondencia de vértices:
A con *D*, *B* con *F* y *C* con *E*
Se cumple que:
$AB = k(DF)$, $BC = k(FE)$, $CA = k(ED)$
Se concluye que:
$m<ABC = m<DFE$, $m<BCA = m<FED$,
$M<CAB = M<EDF$?

Triángulos *LAL*

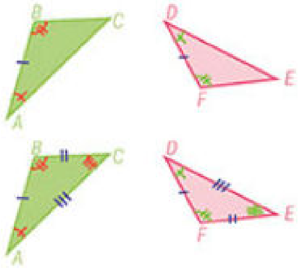
Si el ángulo de un triángulo tiene la misma medida que el ángulo correspondiente de otro y los lados correspondientes de los triángulos tienen longitudes proporcionales de acuerdo con una constante de proporcionalidad *k*, ¿los dos triángulos serán semejantes? Analiza la siguiente figura.



Correspondencia de vértices:
A con *D*, *B* con *F* y *C* con *E*
Se cumple que:
$AB = k(DF)$, $CA = k(ED)$ y $M<CAB = M<EDF$
Se concluye que:
$m<ABC = m<DFE$, $m<BCA = m<FED$ y
$BC = k(FE)$?

Triángulos *ALA*

Si el lado de un triángulo es proporcional al lado correspondiente de otro triángulo y los ángulos correspondientes de los triángulos son iguales, ¿los dos triángulos serán semejantes?



Correspondencia de vértices:
A con *D*, *B* con *F* y *C* con *E*
Se cumple que:
$AB = k(DF)$, $m<ABC = m<DFE$ y
$M<CAB = M<EDF$
Se concluye que:
$m<ABC = m<DFE$, $BC = k(FE)$ y
$CA = k(ED)$?

Analízalo y coméntenlo en grupo.

- ¿Este criterio *ALA* puede relacionarse con posibles criterios *AAA* y *AA*? Explica tu respuesta: ________________
- ¿Por qué un criterio *AAA* sería lo mismo que un criterio *AA*? Explícalo: ______
- ¿Podrían ser válidos criterios como *ALL*, *LLA*, *AAL* o *LAA*, aunque sea para cierto tipo de triángulos? ______ Explica tu respuesta: ________________

Aprende con tecnología

Para conocer más sobre el tema de la congruencia de triángulos a partir de conceptos, ejemplos y ejercicios, puedes navegar en la página de internet:
http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=137527
(consultado el 2 de diciembre de 2016).

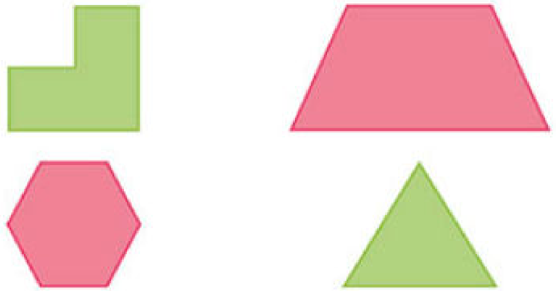
5 Utilizo lo que aprendí

1. Reúnete en la biblioteca de tu escuela con compañeros para resolver las siguientes actividades de manera colaborativa. Transcriban los incisos en hojas carta y sugieran a su profesor que los revisen en el aula y así obtengan retroalimentación.

   a) ¿Pueden establecerse criterios de congruencia para cuadriláteros, análogos a los establecidos para determinar la congruencia de triángulos? ¿Por qué?

b) Construyan un paralelogramo que tenga la misma área que un triángulo dado y un ángulo de la misma medida que uno de los ángulos del triángulo.

c) Dividan las siguientes figuras en 4 partes que tengan la misma área:



d) Construyan un triángulo con el segmento AC y con ese lado tracen dos ángulos: de 40° y 70°.

Aprende de los errores

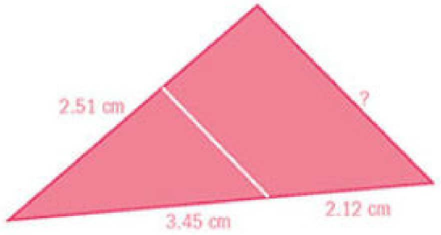
Si un amigo afirma que se puede establecer un criterio de congruencia de triángulos *AAA*, ¿le dirías que es falso o verdadero? ¿Por qué?

e) Dibujen un triángulo con las medidas que su compañero les dé. Luego deliberen si con las medidas propuestas se construye un triángulo congruente.

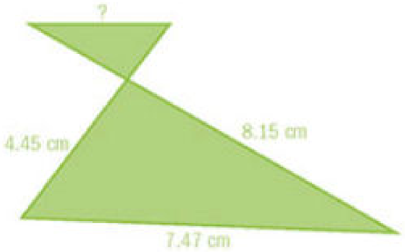
f) Tracen un triángulo a partir de los ángulos 35°, 45° y 100°. Luego dibujen un triángulo semejante con una constante de proporcionalidad de 2.5.

2. Llegó el momento de trabajar individualmente. Observa, analiza y resuelve lo siguiente. No olvides preguntar a tu profesor en caso de duda.

a) Calcula la longitud de los segmentos señalados con una interrogación:



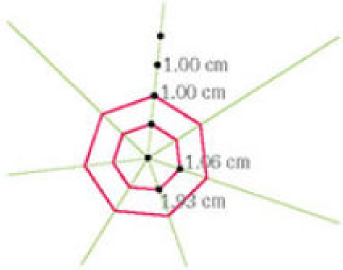
Longitud: _______



Longitud: _______

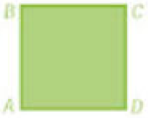
i) ¿Es necesario hacer alguna suposición para obtenerla? ____________
Argumenta tu respuesta: ________________________________
____

b) En un diseño como el siguiente:

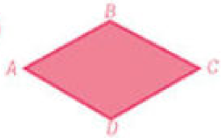


i) Si se coloca un heptágono a cada centímetro, ¿cuál es el perímetro de los dos heptágonos de la figura? ____________

c) Construye un polígono semejante a cada uno de los siguientes, de razón 0.5. ¿Cuál es su perímetro?

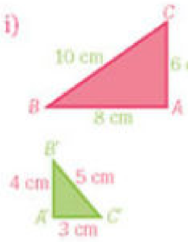
i) 

Polígono semejante:

ii) 

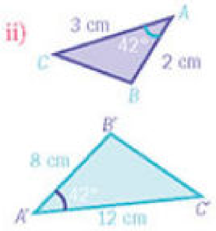
Polígono semejante:

d) Determina si los siguientes pares de rectángulos son semejantes. Escribe el criterio de semejanza que utilices en cada caso.

i) 

¿Son semejantes? ____________

Criterio de proporcionalidad: ____________
____

ii) 

¿Son semejantes? ____________

Criterio de proporcionalidad: ____________
____

e) Cuando la constante de proporcionalidad en una relación de semejanza entre dos triángulos es igual a 1, ¿cómo serán dichos triángulos? Represéntalo gráficamente.

3 Proporcionalidad y funciones

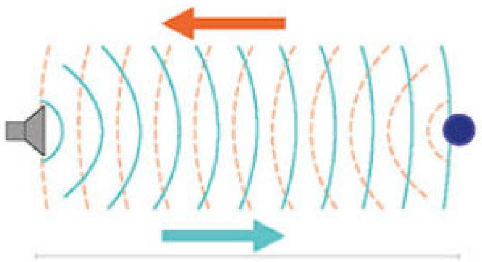
Representaciones matemáticas de un fenómeno

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

1 Comienza a pensar

1. En sesión grupal guiada por el profesor lean el siguiente caso. Después respondan y debatan sus respuestas.

El sonar es un instrumento instalado en las embarcaciones marítimas que usa la propagación del sonido bajo el agua para navegar, comunicarse o detectar objetos sumergidos. Este aparato emite vibraciones de alta frecuencia que al chocar con un objeto, rebotan y vuelven hacia su emisor, lo que hace posible calcular la distancia entre dos objetos sumergidos. Por ejemplo, entre un submarino y un arrecife la velocidad promedio del sonido en el agua de mar es de 1 500 m/s.



a) Si un submarino recibe una vibración de regreso a los 3 segundos de haber sido emitida, ¿a qué distancia estará el objeto detectado? ______________

b) Ahora bien, si sabemos que un objeto se ubica a 1 000 m de distancia del submarino, ¿cuánto tiempo tardará en ir y regresar una vibración emitida por éste? ______________

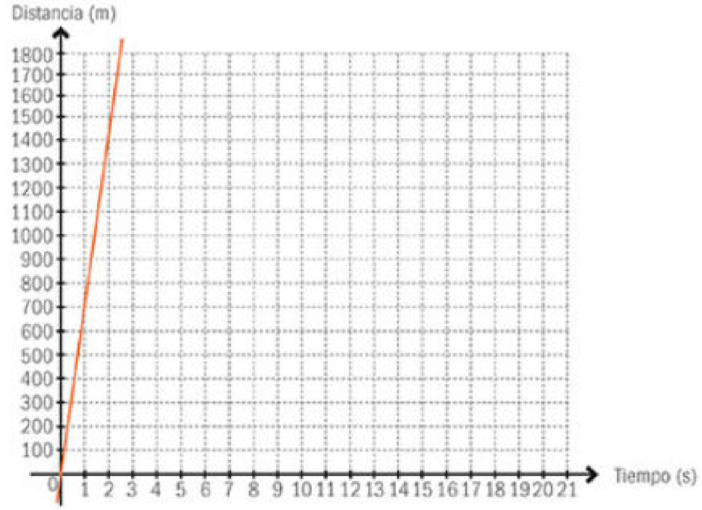
c) Representa tus procedimientos en el siguiente recuadro y sobre las líneas arguméntalos.

d) ¿Coinciden las respuestas de todos? ________ Independientemente de que sus resultados coincidan, ¿hicieron procedimientos similares? ________ ¿Cuáles? ______________

2 Analicemos juntos

1. En parejas, analicen, discutan y respondan lo presentado a continuación.

a) La siguiente gráfica muestra la relación entre el tiempo que tardan las vibraciones emitidas por el submarino en regresar a éste, con las distancias a las que se encuentran los objetos con los que chocan dichas vibraciones:



Con base en la gráfica, completen la siguiente tabla:

Tiempo (s)	Distancia del objeto al submarino (m)
0.3	
	1 200 m
2.7	
	3 250 m
4.1	
	5 423 m

2. Ahora, de manera individual, responde en tu cuaderno lo que se solicita a continuación.

a) Formula un procedimiento con el que, al saber el tiempo en que las vibraciones regresan al submarino, se puedaconocer la distancia a la que se encuentra dicho objeto.

b) Compara tu método con el de tus compañeros. ¿Llegaron a procedimientos distintos pero que los lleven a los mismos resultados? ________ ¿Cómo pueden determinarlo?

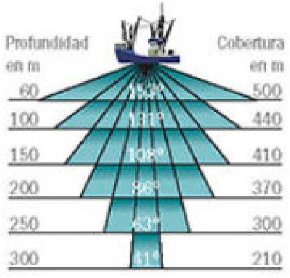
c) Tres compañeros propusieron una expresión algebraica que establece la relación entre el tiempo (t) que tardan las vibraciones emitidas por el submarino en regresar a este, con las distancias (d) a las que se encuentran los objetos con los que chocan dichas vibraciones:

Expresión de Juan: $d = \frac{600}{t}$

Expresión de Pedro: $t = \frac{d}{600}$

Expresión de Toño: $d = 600t$

i) ¿Cuál o cuáles de las expresiones algebraicas propuestas por los muchachos son válidas para la situación planteada? ¿Por qué?
ii) Demuéstrale a un compañero aquella o aquellas expresiones que no son válidas.



Esquema de un corte transversal sobre el funcionamiento de un sonar.

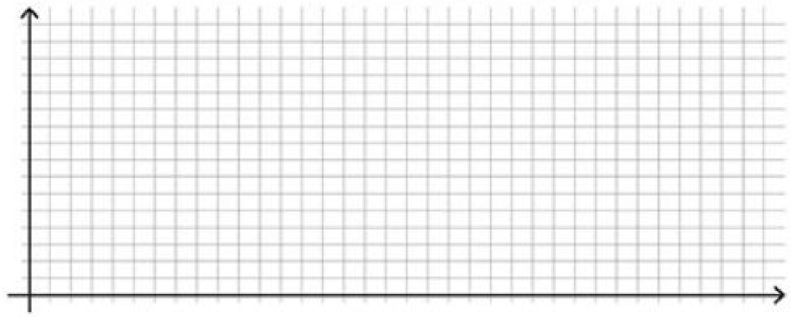
El esquema de la izquierda representa un tipo de sonar llamado **ecosonda multihaz**, comúnmente utilizado por arqueólogos marítimos.

La siguiente tabla relaciona la cobertura con la profundidad de este tipo de sonar, considerando cada sección transversal como un triángulo.

d) Completa la columna con los valores del área de la sección transversal.

Cobertura (m)	Profundidad (m)	Área de la sección transversal
500	60	
440	100	
410	150	
370	200	
300	250	
210	300	

e) Grafica la relación de la profundidad con el área de la sección transversal. Asigna el eje horizontal para los valores de la profundidad y el eje vertical para los valores del área de la sección transversal.



f) Compara tu tabla y gráfica con las de tus compañeros, ¿coinciden? ______
i) Siempre que la profundidad aumenta, ¿aumenta el área de la sección transversal? ______ ¿Por qué? ______
ii) ¿Cuánto consideras que debe ser la cobertura en metros a 400 y 500 m de profundidad? 400 m ______ 500 m ______

iii) ¿La relación entre la cobertura y la profundidad es proporcional? Explica tu respuesta.
iv) Y el área de la sección transversal a dichas profundidades, ¿cuál será? ______

g) Determina y representa una expresión algebraica que relacione la profundidad, la cobertura y el área que abarca la sección transversal.
h) ¿Existe solo una manera algébrica de representar esa relación? Propón otra y discútela con tu grupo.
i) Con ayuda de su profesor intenten determinar una expresión algebraica que relacione la profundidad y el área que abarca la sección transversal, analicen la relación entre dichas variables.

Conexión matemática

Una *relación de proporcionalidad directa* entre dos variables es aquella en la que el cociente entre las cantidades que se corresponden es siempre el mismo y se denomina constante de proporcionalidad (k).

Aprende con tecnología

Para conocer otras versiones acerca de las relaciones de proporcionalidad, así como ejemplos extraídos de la vida cotidiana y de otros tipos, consulta el sitio: http://www.misecundaria.com/Main/RelacionesDeProporcionalidad (consultado el 2 de diciembre de 2016).

1. Organizados en equipos y ya analizadas las situaciones relacionadas con el sonar, contesten las siguientes preguntas.

a) La relación que se establece entre el tiempo en que las vibraciones que llegan a un objeto, chocan con él y regresan al submarino, con la distancia a la que está un objeto, ¿es una relación proporcional? ______ ¿Por qué? ______
b) En esa relación, ¿cuál es la constante de proporcionalidad? ______
c) ¿Cómo la determinaste? ______
d) La relación entre la profundidad y el área que abarca la sección transversal, en el desempeño del sonar, ¿es una relación proporcional? ______ ¿Por qué? ______
e) Entre dos situaciones como las presentadas anteriormente o de cualquier otro ámbito, ¿cómo puedes diferenciar una situación proporcional de una que no lo es? Arguméntalo. ______
f) Con base en las situaciones exploradas, ¿qué características tienen las gráficas que corresponden a relaciones proporcionales de aquellas que no representan este tipo de fenómenos? ______

Algo por aprender

En el análisis de un fenómeno se hace uso de varias representaciones de la misma situación: una tabla de valores, una gráfica o la expresión algebraica. En todas se muestra la relación o relaciones que se establecen entre las variables involucradas.

Tiempo (s)	Posición (m)
0	0
1	1.5
2	3
5	7.5
12	18

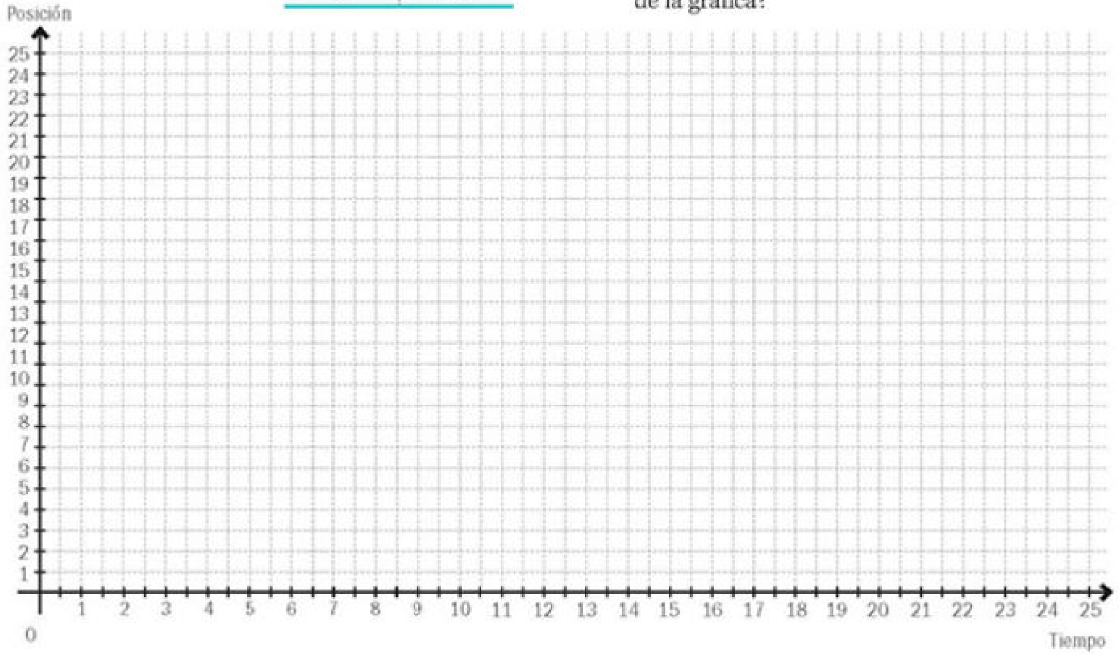
Tiempo (s)	Posición (m)
0	0
1	0.25
2	1
3	2.25
4	4
5	6.25
6	9
7	12.25
8	16
9	0.25
10	25

Por ejemplo, analicemos las siguientes situaciones de tu asignatura de ***Ciencias II*** (con énfasis en Física). Las tablas representan dos recorridos distintos en bicicleta:

1. Haz lo que se indica a continuación y responde en tu cuaderno las preguntas de la dinámica. No olvides consultar a tu profesor en caso de dudas.

   a) En el siguiente plano ubica, mediante puntos de distinto color, la información presentada en las tablas de los recorridos.

   b) ¿Cómo puedes determinar la rapidez a partir de la gráfica?



   c) ¿En ambos recorridos los desplazamientos se realizan con la misma rapidez? ¿Por qué?

   d) ¿La relación entre la posición y el tiempo en ambos recorridos es proporcional? Explica tu respuesta.

   e) Si utilizas *x* para denotar el tiempo en segundos y para la posición, determina una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la posición en cada recorrido.

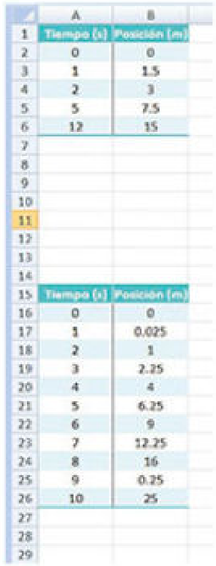
   f) ¿Cuál es la relación entre la diferencia entre las expresiones algebraicas y su respectiva gráfica?

   g) De acuerdo con la expresión algebraica que representa cada recorrido, ¿qué característica tiene la que representa una situación proporcional?

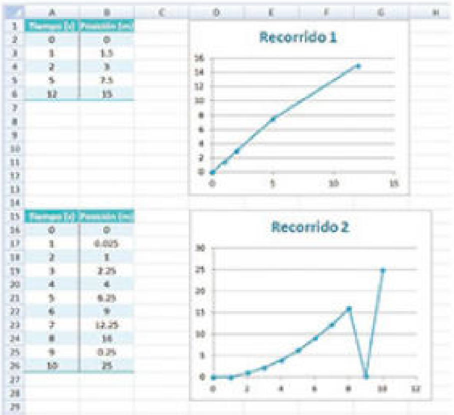
   h) ¿Qué tipo de relación representan las dos expresiones correspondientes al recorrido? ¿Por qué?

Aprende con tecnología

Un medio tecnológico que puedes utilizar para la elaboración de tablas y gráficas es la hoja electrónica de cálculo. Por ejemplo, ingresa los valores de las tablas presentadas en la sección anterior, "Algo por aprender", como se muestra en la siguiente imagen:



Mediante "Insertar Gráfico", puedes elegir el gráfico de dispersión, una vez que hayas seleccionado las celdas donde se ubican los valores que deseas graficar:



5 Utilizo lo que aprendí

1. Transcribe el siguiente planteamiento a hojas carta y respóndelo; te servirá de guía en tus evaluaciones. Propón a tu profesor su revisión en el aula.

   En la Convención para la Protección de la Capa de Ozono logró modificarse la velocidad con que se incrementa el área del agujero en la atmósfera terrestre, de manera que si bien en 2000 se alcanzó la cifra máxima registrada, 30.31 millones de km^2, para 2005 ésta era de 26.77 millones de km^2.

   Suponiendo que la tendencia de recuperación de la capa de ozono se mantuviera como lo ha hecho en este periodo.

   a) ¿Se logrará la meta de verla totalmente recuperada para 2050? ¿Antes o después de esta fecha? Construye una tabla de valores en la que, por periodos de 5 años, se muestre el avance en la reducción de la superficie del agujero. Una vez realizada la tabla utiliza los valores para trazar un gráfica que represente la situación.

   b) Determina una expresión algebraica que exprese las relaciones entre el tamaño del agujero a medida que pasa el tiempo en años.
   ¿La relación que se establece entre el tamaño del agujero conforme pasan los años es proporcional? Justifica tu respuesta.

   c) En la expresión algebraica propuesta, ¿qué representa la constante de proporcionalidad?

   d) Guiados por el profesor, comparen la tabla, gráfica y expresión de todos así como la respuesta y argumentación de si la situación es o no proporcional.

Variación cuadrática

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

1 Comienza a pensar

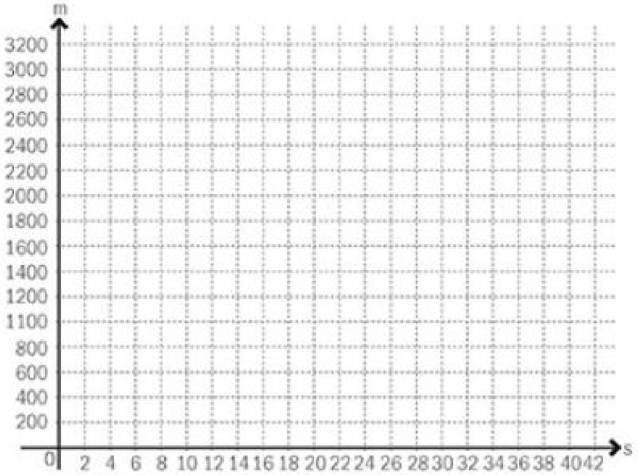
1. En tríos, lean el caso presentado a continuación y respondan los cuestionamientos posteriores.

Cuando un paracaidista salta desde un avión experimenta una caída libre hasta el momento en que debe abrir su paracaídas. A partir de ese momento la resistencia del aire que actúa sobre el paracaídas es vital para llegar sano y salvo hasta una superficie segura, ya que reduce la velocidad de la caída.

Las siguientes imágenes representan distintos momentos de un salto en paracaídas.

Momento del salto	Tiempo en que ocurre	Distancia de la superficie
	0 segundos	3 048 m de altitud
	4 segundos	2 969 m de altitud
	8 segundos	2 736 m de altitud
	12 segundos	2 346 m de altitud
	16 segundos	1 800 m de altitud

a) Registra los valores anteriores en el orden que consideres adecuado:



Tiempo (s)	Altura (m)

b) Si unen los puntos considerando sólo el periodo de tiempo mostrado (0 a 16 segundos), ¿qué gráfica se forma? ______________________
¿Por qué? ______________________

c) ¿Existe la posibilidad de que en una situación de caída libre, como la del salto en paracaídas, la gráfica que se forme sea una recta? ______________
¿Por qué? ______________________

d) Si en este salto se abrió el paracaídas a 1 200 m, ¿cómo determinarías los segundos transcurridos hasta ese momento? ______________________

e) Si quien saltó se deja caer desde la misma altura hasta la superficie terrestre sin paracaídas que disminuya su velocidad, ¿en cuántos segundos tocará suelo? ____________ ¿Cómo lo determinaste? ______________________

Glosario

Variación cuadrática. Representación gráfica en el plano cartesiano de una función cuadrática mediante una parábola, cuyo eje de simetría es paralelo al eje de las ordenadas. La parábola se abrirá hacia arriba si el signo es positivo, y hacia abajo en caso contrario. El estudio de las funciones cuadráticas tiene numerosas aplicaciones en campos muy diversos, como por ejemplo la caída libre o el tiro parabólico de un arquero.

2 Analicemos juntos

1. Analiza este caso y reflexiona en sesión grupal guiada por el profesor.

Como podrás recordar, del curso de ***Ciencias II*** (con énfasis Física), se denomina caída libre al movimiento de un cuerpo bajo la acción de la fuerza gravitatoria terrestre. Esta definición formal excluye a todas las caídas reales influidas en mayor o menor medida por la resistencia del aire.

Todos los cuerpos con este tipo de movimiento tienen una aceleración dirigida hacia abajo cuyo valor depende del lugar en el que se encuentren. En la superficie de la Tierra este valor es de aproximadamente 9.8 m/s^2, es decir que los cuerpos en caída libre aumentan su velocidad (hacia abajo) 9.8 m/s cada segundo.

Llamamos *g* a la aceleración que experimenta un cuerpo en caída libre. La expresión algebraica que relaciona el recorrido (*h*) en metros que lleva un objeto que se deja caer libremente, con respecto al tiempo transcurrido en segundos es: $= \frac{12}{2}$

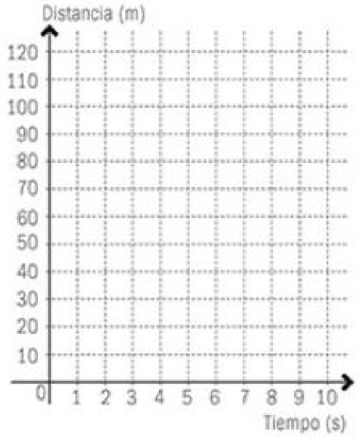
2. Con base en lo anterior responde lo expuesto a continuación.

a) Completa la siguiente tabla que muestra la distancia (en metros) que va avanzando una moneda que baja en caída libre, conforme avanza el tiempo (en segundos).

Tiempo (s)	Distancia (m)
0	0
1	
2	
3	
4	
5	

b) En la siguiente gráfica representa los datos obtenidos en la tabla.

Considerando que $h = \frac{9.8t^2}{2}$



i) ¿Qué forma tiene la gráfica? ____________________

ii) ¿Por qué no puede ser una recta?

iii) ¿Cómo interpretas que la distancia aumenta según la gráfica, a pesar de que se trata de un objeto que va cayendo? ____________________

Aprende con tecnología

Para que refuerces lo aprendido en el aula acerca de la representación gráfica de las funciones polinómicas mediante la variación cuadrática, resuelve y comenta los ejercicios de la página: http://goo.gl/03hyu

Asimismo, también puedes ver videos con conceptos y ejemplos que te ayudarán a aumentar tu marco de referencia. Búscalos en: http://goo.gl/RYQVP (consultados el 2 de diciembre de 2016).

3 ¿Adónde llegamos?

1. Organizados en equipos, reflexionen.

a) Si suponemos que la moneda se deja caer desde una altura de 100 m, ¿cómo determinas la altura de la moneda durante su recorrido en caída libre?

b) Completa la siguiente tabla para representar la caída desde 100 m de altura.

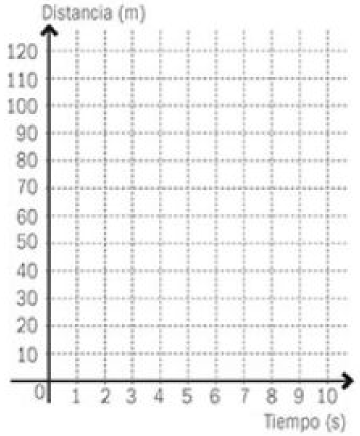
Tiempo (s)	Distancia (m)
0	100
1	
2	
3	
4	
5	

c) En la siguiente gráfica representa los datos obtenidos en la tabla.

i) ¿Ahora cómo es la gráfica? ____________________

ii) ¿Por qué son diferentes las gráficas si se refieren al mismo fenómeno?

iii) ¿Cómo sería la expresión algebraica en esta situación? ____________________



Conexión matemática

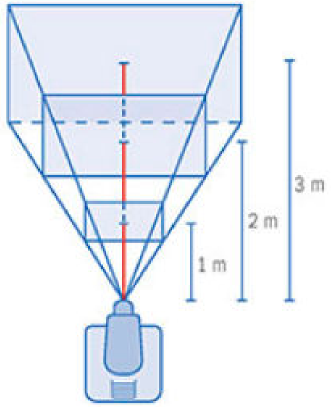
El domingo 14 de octubre de 2012, el austriaco Felix Baumgartner, del proyecto Red Bull Stratos, logró saltar con paracaídas desde una cápsula sostenida en la estratosfera por un globo de helio aproximadamente a 39 000 m de altura, rompiendo tres récords mundiales, entre ellos los de caída libre desde mayor altitud y a mayor velocidad, superando por unos segundos la barrera del sonido.

4 Algo por aprender

Las tablas y gráficas de fenómenos cuadráticos tienen características especiales diferentes de las que representan fenómenos lineales.

Revisemos las siguientes situaciones.

En la actualidad, el uso de proyectores de video es frecuente en actividades académicas y laborales, así que resulta importante analizar la relación que existe entre la superficie de proyección y la distancia al muro o pantalla en que se proyecta.



En la imagen podemos observar que conforme el videoproyector se aleja del sitio donde se refleja la imagen, el área de proyección aumenta. Esta superficie rectangular proyectada tiene por largo el doble de su ancho. A la vez, la distancia entre el proyector y el muro es igual a la distancia del ancho.

1. Reúnanse en parejas, analicen la información y resuelvan los cuestionamientos en hojas aparte. No olviden consultar a su profesor ante cualquier duda.

a) Completen la siguiente tabla y examinen la relación; calculen también el área de proyección en el muro.

Distancia al muro (m)	Ancho del rectángulo (m)	Largo del rectángulo (m)	Perímetro del rectángulo (m)	Diferencia entre el perímetro del rectángulo a 1 m de distancia y a 0 m de distancia	
0	0	0	0		
1	1	2	6	6 - 0 =	6
2	2	4			
3	3				
4	4				
5	5				

Distancia al muro (m)	Área del Rectángulo (m^2)	Diferencia entre el área del rectángulo a 1 m y a 0 m de distancia		Ahora obtén las diferencias de las restas obtenidas en la columna de la izquierda
0	0			
1	2	2 - 0 =	2	
2				
3				
4				
5				

i) ¿Cuáles son las diferencias entre las medidas obtenidas de los perímetros de los rectángulos?

ii) ¿Cuáles son las diferencias entre las medidas obtenidas de las áreas de los rectángulos?

iii) ¿Hasta qué momento se vuelven constantes las diferencias de las medidas de las áreas?

b) Analicen las tablas que completaron en el inciso anterior y comprueben si se repite la situación.

c) Comparen sus respuestas con las de otras parejas y anoten una conclusión respecto a las características de las tablas que registran a fenómenos cuyo comportamiento está representado por una ecuación cuadrática.

d) En su cuaderno dibujen, en el mismo plano cartesiano, las gráficas que representen la relación entre la distancia del proyector a la pared y el perímetro de los rectángulos reflejados en ella, además de la relación entre la distancia del proyector a la pared y el área de ésta. Así, ¿en qué se parecen y en que difieren ambas gráficas? Anótenlo.

5 Utilizo lo que aprendí

1. Copia en tu cuaderno los siguientes problemas, respóndelos y solicita a tu profesor comentarlos en el aula para así obtener retroalimentación.

Uno de los fenómenos que puede ser modelado con una función de segundo grado o cuadrática es el tiro vertical. La expresión algebraica que relaciona la posición (yf) a la que se encuentra un objeto lanzado de manera vertical con respecto al tiempo transcurrido es: $y_f = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$

Donde:

yf = posición del objeto
y_0 = posición inicial del objeto
t = tiempo en segundos
v_0 = velocidad inicial
g = aceleración de gravedad equivalente a 9.8 m/s². En el caso del tiro vertical la aceleración de gravedad se considera negativa, ya que la velocidad inicial se va reduciendo.

Por ejemplo, deseamos conocer la altura que alcanza un proyectil lanzado verticalmente, con una velocidad inicial de 20 m/s después de 1, 2 y 4 segundos. Consideraremos que se lanza desde una posición inicial igual a cero.

a) En tu cuaderno elabora una tabla y una gráfica en la que se represente la situación.
   i) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?
   ii) ¿Cuánto tiempo tarda en caer el proyectil a la posición de inicio?

b) ¿Cuál o cuáles de las siguientes tablas pertenecen a una variación cuadrática?

   i) Argumenta tu respuesta.

x	f(x)
1	4
2	10
3	18
4	28
5	40
6	54
7	70
8	88
9	108
10	130

x	f(x)
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19
7	22
8	25
9	28
10	31

x	f(x)
1	0.5
2	2
3	4.5
4	8
5	12.5
6	18
7	24.5
8	32
9	40.5
10	130

c) Un proyectil se dispara verticalmente desde una altura de 15 m sobre el nivel del piso, con una velocidad inicial de 40 m/s. Con base en la expresión de tiro vertical, determinen la altura máxima del proyectil y el tiempo que tarda en alcanzarla. Grafiquen la situación.

d) ¿Qué expresión algebraica puede representar la función que se genera en la situación inicial de la lección respecto al videoproyector?

4 Nociones de probabilidad

Escala de probabilidad

Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

1 Comienza a pensar

1. Estudia el siguiente caso y responde las preguntas. Luego coméntalas con tus compañeros y obtengan retroalimentación del profesor.

a) Analiza el lanzamiento de un dado de seis caras como el de la imagen y utiliza las palabras "seguro", "probable", "difícil" e "imposible" para cuantificar la mayor o menor dificultad que tiene cada uno de estos sucesos.

i) Salir un número mayor que 0. ______

ii) Salir un número mayor que 1. ______

iii) Salir un divisor de 7. ______

iv) Salir un múltiplo de 7. ______

b) Ahora, en el siguiente segmento de recta, indica el resultado de los incisos anteriores asignando un valor sobre la recta a cada uno de ellos.

c) Compara con tus compañeros la forma en que ubicaste los incisos.

i) ¿Coinciden en la ubicación? ______ Indaguen si los incisos que coincidieron se resolvieron con procedimientos similares o diferentes. ______

ii) ¿Cuál es la probabilidad teórica que corresponde a cada una de las opciones de los incisos *a, b, c* y *d*? ______
¿Cómo las obtuviste? ______

d) Con base en las probabilidades que calculaste, ¿los valores donde ubicaste los resultados de los incisos deben modificarse? ______ Argumenta tu respuesta: ______

2 Analicemos juntos

Antes de iniciar las actividades de esta sección, recuerda lo siguiente:

- Un **experimento aleatorio** es aquel en el que no es posible determinar con exactitud el resultado.
- El conjunto de todos los posibles resultados se llama **espacio muestral** del experimento.
- En los experimentos aleatorios como lanzar un dado o una moneda puede haber uno o más resultados, dependiendo de las condiciones dadas al inicio del experimento; por ejemplo, que al lanzar un dado caiga número par, o que, en el caso de una moneda, caiga sol. A estas condiciones se les denomina **eventos** y sus posibles resultados pertenecen al espacio muestral.
- La probabilidad de que ocurra un evento se denota por (*PA*), donde *A* es el nombre que se le asigna a dicho evento.

Glosario

Probabilidad de un suceso aleatorio. En su origen se definía como la relación del número de casos 'favorables' con el de casos posibles. Esta definición aún es útil en numerosas situaciones simples, por ejemplo, la probabilidad de sacar una de seis caras de un dado es $\frac{1}{6}$.
Tomado de A. Bouvier y M. George, *Diccionario Akal de Matemáticas*, Madrid, Akal, 2008, p. 668.

1. Ahora, analiza las siguientes situaciones y contesta las preguntas.

Situación 1

a) Una bolsa contiene 25 pilas, 10 descargadas y 15 cargadas, ¿cuál es la probabilidad de sacar una pila descargada? ______ ¿Cuál la de una cargada? ______

i) ¿Cómo determinaste las probabilidades anteriores? ______

ii) Represéntalo a continuación.

Situación 2

a) De los 200 miembros de un club deportivo, 140 (80 mujeres y 60 hombres) practican sólo natación, y 60 (40 mujeres y 20 hombres) sólo ciclismo.

i) Completa la tabla de la derecha.

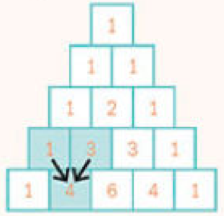
ii) Si elegimos al azar a cualquier socio del club deportivo, ¿cuál es la probabilidad teórica del evento "socio que sólo practica natación"?

	Natación	Ciclismo	Total
Mujeres			120
Hombres			80
Total			200

Conexión matemática

El triángulo de Pascal, llamado así en honor de Blaise Pascal, un famoso matemático y filósofo francés, es una de las pautas de números más interesantes y con muchas utilidades; la probabilidad no es la excepción.

Para construir el triángulo, empieza con 1 arriba, número que se repite debajo formando un triángulo. Cada número es la suma de los dos números que tiene encima, menos los extremos, que son siempre 1.



Para saber más de la relación entre el triángulo de Pascal con la probabilidad en situaciones de azar, como el lanzamiento de una moneda, explora la página web http://goo.gl/p9ip5 (consultado el 2 de diciembre de 2016) de donde se extrajo esta información.

iii) Pero, ¿cómo lo calculaste ? Arguméntalo: ______________________

____

iv) Y si elegimos al azar a cualquier socio, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento "socio que practica sólo ciclismo y además es hombre"? ________

____

v) Comenta con tus compañeros cómo obtuviste tu respuesta, anota los procedimientos comunes de quienes obtuvieron la misma respuesta.

vi) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir a cualquier socio, unicamente practique natación? ______________________

vii) ¿Cuál es la probabilidad de elegir un socio que solo practique ciclismo y además sea hombre? ______________________

viii) ¿Relacionaste las probabilidades que obtuviste para el evento A y el evento B en el problema anterior? ____________ ¿De qué manera? __________

____

ix) ¿Es posible que exista uno o varios socios que cumplan al mismo tiempo con el evento A y B? _______ Argumenta tu respuesta: ______________

____

Situación 3

a) Consideremos el experimento de lanzar dos veces una moneda. Si la primera vez sale águila, ¿afecta el hecho de que en la segunda salga águila o sol? ______ ¿Por qué? ______________________

____

i) Completa la siguiente tabla con los resultados probables del experimento lanzar dos veces una moneda.

Primer lanzamiento: resultados posibles	Segundo lanzamiento: resultados posibles

ii) Obtener sol en el primer lanzamiento y también en el segundo, ¿es una de cuántas opciones posibles? _______ ¿Cuál sería la probabilidad de obtener águila en el primer intento y sol en el segundo? ______________

____

iii) Considera un tercer lanzamiento y, en tu cuaderno, construye el esquema o tabla con el cual se puedan apreciar todas las opciones posibles.

iv) Con base en tu esquema, ¿cuál es la probabilidad de obtener "águila, sol, águila" (en ese orden) en los tres lanzamientos? _______ Argumenta tu respuesta: ______________________

3 ¿Adónde llegamos?

1. En parejas, debatan los planteamientos dados a continuación y anoten sus conclusiones.

a) Con base en las situaciones anteriores contesta las siguientes preguntas:

i) En la **Situación 1**, la probabilidad de sacar una pila cargada y una sin carga, ¿cubre el total de las probabilidades? _______ ¿Por qué? _______

____

ii) ¿Qué probabilidad tiene el evento "sacar al azar una pila con carga o sin carga"? ______________________

iii) En la **Situación 2**, la probabilidad de que al elegir a cualquier socio del club que únicamente practica natación, o bien, sea uno que practica sólo ciclismo y además es hombre, ¿cubre el total de las posibilidades? _______ Explícalo: ______________________

____

iv) En la **Situación 3**, cada vez que se aumenta un lanzamiento de moneda y se calcula la probabilidad de un evento específico, ¿las posibilidades aumentan o disminuyen? ______________________

v) ¿El resultado de los lanzamientos anteriores afecta el posible resultado al agregar un nuevo lanzamiento? _______ ¿Por qué? ______________

____

Aprende con tecnología

En lo cotidiano se pueden observar muy diversas situaciones de probabilidad. En lo que compete a tu curso, puedes practicar lo que has aprendido y practicado hasta ahora visitando la página: http://eduteka.icesi.edu.co/MI/master/interactivate/activities/Prob/Index.html (consultado el 2 de diciembre de 2016).

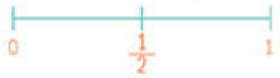
4 Algo por aprender

La **probabilidad de un evento** es una medida de la certeza de que éste va a ocurrir. Se mide en una escala entre 0 y 1, donde 0 significa que el evento no ocurre y 1 que ocurre con certeza.

Un evento se denomina cierto si ocurre siempre, por lo tanto su probabilidad es 1.

Una probabilidad de $\frac{1}{2} = 0.5$, indica que es igualmente probable que ocurra o no.

En la escala de la probabilidad se vería de la siguiente manera.



Dos eventos se denominan **complementarios** cuando su unión es el espacio muestral. La suma de las probabilidades de dos eventos complementarios es igual 1. Así, se denomina A^c al evento complementario del evento A.

Si el espacio muestral para el lanzamiento de un dado es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la probabilidad de obtener un múltiplo de 3 al tirar el dado es $P(A) = \frac{2}{6}$, y la probabilidad de no obtener un múltiplo de 3 es $P(a^c) = \frac{4}{6}$.

Además:

$P(a^c) + \frac{4}{6}$

$P(A) + P(a^c) = \frac{6}{6}$

$P(A) + P(a^c) = 1$

1. Después de comentar la información anterior, responde.

a) De las situaciones de la sección "Analicemos juntos", ¿cuáles son eventos complementarios? ______________ ¿Por qué? ____________________

____

Represéntalo a continuación.

Dos eventos se consideran **mutuamente excluyentes** o **disjuntos** si no tienen elementos en común, por ejemplo, en la **Situación 2** de la sección "Analicemos juntos", los eventos "socio que solo practica natación" y "socio que solo practica ciclismo y además es hombre", no tienen elementos en común porque no existen socios que cumplan con ambas condiciones.

Dos eventos son **independientes** si la ocurrencia de uno afecta a la ocurrencia del otro; por ejemplo, si lanzamos un dado dos veces, el resultado del primer lanzamiento no tiene ninguna influencia en el resultado del segundo.

5 Utilizo lo que aprendí

1. Analiza las siguientes situaciones y contesta lo que se solicita. Además de resolverlo aquí, puedes copiarlas en hojas aparte o en tu cuaderno, pues funcionarán como guía en tus futuras evaluaciones.

a) Antonio lanza un dado de 6 caras y dice a Andrés que A es el evento "cae un número menor que 3", y que B es el evento "cae un número mayor que 3".

i) Dichos eventos, ¿son complementarios?_______ ¿Por qué?___________

____

ii) ¿La situación corresponde a eventos independientes?_______ ¿Por qué?

____

iii) Los eventos A y B, ¿son mutuamente excluyentes?_________________

Explica tu respuesta: ________________________________

____

iv) ¿Cómo puedes calcular la probabilidad de que ocurra el evento A o B?

____

v) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. ¿Coinciden? ______

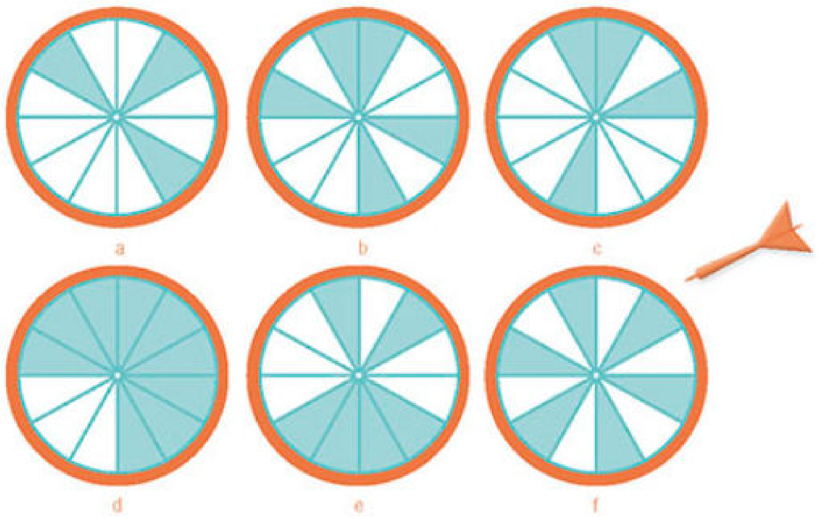
¿En qué y por qué? ______________________________

____

____

b) Lucía y Vanessa gustan de jugar al lanzamiento de dardos cada fin de semana, para lo cual disponen de 6 ruletas que ellas mismas elaboraron con material reciclable.

Ayúdalas a determinar la probabilidad que tiene cada una de que al lanzar el dardo, éste caiga en las áreas de color verdes.



i) Localiza el resultado de las probabilidades anteriores en el siguiente segmento:

0 1

ii) Si en vez de considerar la probabilidad de acertar en el área verde, considerarán la de dar en el área blanca, ¿cambian los valores de las probabilidades en la escala del 0 al 1? __________________

iii) Ubica esta situación en el siguiente segmento:

0 1

c) Ahora que entiendes más sobre la probabilidad, reflexiona sobre su importancia, en tu vida diaria y registra tus conclusiones.

____

____

____

5 Análisis y representación de datos

Diseño de encuestas y muestreo

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

1 Comienza a pensar

1. Guiados por el profesor, dividan el grupo en cinco equipos y realicen las siguientes indagatorias. Destinen cinco minutos a cada equipo para que pueda recopilar la información solicitada.

   a) Preguntar a todos los compañeros del grupo:

Equipo 1: el deporte favorito
Equipo 2: el tipo de música favorita
Equipo 3: el equipo favorito de futbol
Equipo 4: el número de hermanos
Equipo 5: el tipo de comida favorita

   b) Una vez que hayan recabado los datos, cada equipo buscará la forma de representarla gráficamente. Luego la expondrán al grupo en cinco minutos, indicando cómo obtuvieron la información y por qué se decidieron por la representación que eligieron. De su curso anterior de matemáticas recuerden la construcción de gráficas (histogramas, gráficas poligonales, etcétera).
   c) Una vez terminadas las presentaciones de cada equipo, contesten:
      i) ¿Qué tipo de gráficas utilizaron? ____________________

      ii) ¿Todos los equipos recolectaron la información de la misma manera? ________ ¿Por qué creen que esto sucedió? ____________________

      iii) ¿Algunas formas de presentar la información permiten mejores formas de entenderla? ________ ¿Cuáles? ____________________.
      Argumenta tu respuesta: ____________________

2 Analicemos juntos

1. Reúnanse de nuevo en equipos y realicen lo siguiente. Si tienen alguna duda, pregunten a su profesor.
   a) Consideren que quieren saber más acerca del tema que investigaron; ahora desean conocer las preferencias de toda la comunidad escolar. Discutan entre ustedes y describan como obtendrían toda la información necesaria. Para ello, consigan algunas hojas recicladas, de preferencia carta, dóblenlas, engrápenlas y fabriquen así un sencillo cuadernillo.

   b) ¿Cómo podrían determinar las preferencias de toda la escuela respecto al tema que les tocó indagar, preguntando sólo a un número determinado de alumnos? Describan su estrategia.

      i) ¿Utilizarían la misma forma que presentaron ante su grupo para representar la información de manera gráfica? ________ ¿Por qué? ____________________

3 ¿Adónde llegamos?

Inducir conocimientos y habilidades sin explicitar

1. En parejas, resuelvan el siguiente caso y registren las respuestas en sus respectivos cuadernos.

   a) Busquen en internet documentos sobre estadísticas de enfermedades. En sitios de instituciones mexicanas como el INEGI (www.inegi.gob.mx), en donde se encuentran tablas como la siguiente, que corresponde al año 2004.

Estadísticas a propósito del Día Internacional de las Personas de Edad			
	Nacional	Hombres	Mujeres
Población 2000	97 483 412	47 592 253	49 891 159
Población de 60 y más años	6 948 457	3 252 357	3 696 100
60-69 años	3 858 931	1 825 070	2 033 861
70-79 años	2 110 944	1 000 303	1 110 641
80-89 años	773 927	342 371	431 556
90-99 años	184 898	76 584	108 314
100 y más años	19 757	8 029	11 728
Defunciones según principales causas 2002	267 794	134 494	133 222
Enfermedades del corazón	60 236	29 073	31 147
Diabetes mellitus	40 030	17 396	22 625
Tumores malignos	37 182	19 691	17 482
Enfermedades cerebro vasculares	21 823	9 910	11 906
Enfermedades del hígado	12 511	8 351	4 155
Enfermedades pulmonares obstructivas crónicas	11 166	6 226	4 939
Accidentes	8 020	5 163	2 853
Influenza y neumonía	6 856	3 362	3 490
Desnutrición y otras deficiencias nutricionales	6 618	3 000	3 616
Bronquitis crónica y la no especificada, enfisema y asma	5 924	3 327	2 597
Insuficiencia renal	5 893	3 049	2 844
Las demás causas	51 535	25 946	25 588

   b) Comenten la utilidad de este tipo de información y escriban sus conclusiones.
   c) Analicen los procedimientos necesarios para obtener este tipo de información y anótenlo.
   d) Planteen diversas formas de presentar la información sin usar de tablas.

2. Considera el caso anterior y responde individualmente.

a) Representa al menos una parte de la información de la tabla en algún tipo de gráfica.

i) ¿Podrías utilizar algún número que represente de manera adecuada la información contenida en la tabla? _______ Argumenta tu respuesta.
____

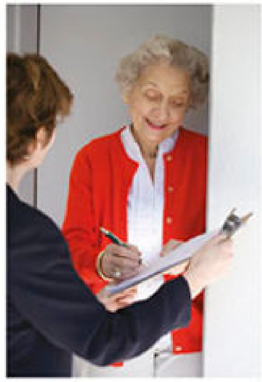
ii) ¿Es posible obtener la misma información que se reporta en la tabla si se recolectan datos de 300 personas, de 1 000, o de 1 000 000? _______ ¿Cómo? Explícalo. ____
____

Algo por aprender

Cuando se desea conocer las opiniones de las personas sobre diversos aspectos, se requiere formular preguntas y recopilar las respuestas obtenidas. Este tipo de procedimiento se denomina **encuesta**. Las preguntas deben formularse previamente y planteárselas a todos los entrevistados, a quienes se les llama **encuestados**. A su vez, a cada respuesta recabada se le denomina **dato**. El total de datos es lo que permite conocer la situación que quiere explorarse o tratar de hacer inferencias sobre lo que puede ocurrir.

1. Reflexiona y responde. Al término, coméntalo con tu compañero más cercano y analicen sus puntos de vista.

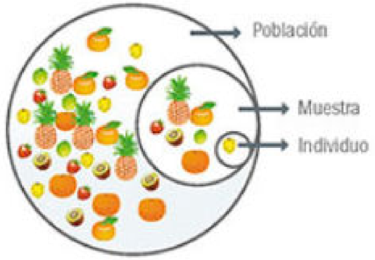
a) Imagina que participas en la elaboración de una encuesta sobre las preferencias en el uso de automóviles. ¿Qué tipos de datos serían relevantes? ¿Bastaría una pregunta o sería necesario plantear varias? Anota tus conclusiones.
____
____



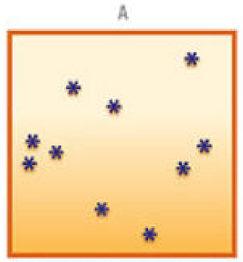
Si todos los datos fueran iguales no tendría sentido recabar información. Por ejemplo, cuando se suelta una piedra desde cierta altura y se pregunta a las personas sobre lo que sucederá al soltarla, invariablemente todas las respuestas indicarán que caerá al suelo. Pero si se pregunta a varias personas sobre su edad, altura o peso, se obtendrán diferentes respuestas o datos, los cuales pueden ser de interés para establecer políticas o programas acerca de salud, cultura y educación, entre otros. Cuando existe variabilidad en las respuestas es necesario recabar información para describir o conocer los diferentes aspectos que influyen en una situación.

Hay diferentes maneras de estudiar las variables y su variabilidad, por ejemplo, la nacionalidad se refiere a valores que son palabras: mexicano, español; peruano, boliviano... Este tipo de datos no admite valores intermedios entre dos valores, es decir, no se puede considerar que una persona sea entre mexicano y peruano. A estos valores se les denomina **discretos**. A esa característica que solo asume valores discretos se le denomina **variable discreta**.

En contraste, si la variable es el peso de las personas, puede recabarse un dato de 43 kg y otro de 44 kg, pero también es posible obtener un valor de peso de 43.68 kg, o cualquier valor intermedio. En este caso, entre cualesquiera dos valores de la variable o datos puede obtenerse un valor o dato que se ubique entre dichos valores de la variable, a la cual denomina **variable continua** porque sus valores son continuos.



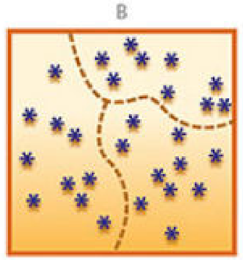
Cuando se hacen encuestas, por lo general, se quiere obtener toda la información posible, pero lograrlo es complejo, pues se requieren muchos recursos humanos, de infraestructura (suma de elementos o servicios necesarios para la creación y funcionamiento de una organización cualquiera) y económicos. Generalmente, la población estadística es inalcanzable y por ello en estadística se elaboran métodos para trabajar con una parte de ésta.



Muestreo aleatorio simple

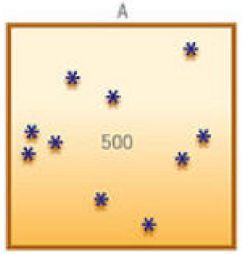
Resulta difícil tener acceso a las poblaciones estadísticas, así que uno de los puntos más importantes corresponde a los métodos adecuados para elegir partes de la población de manera efectiva. A esta parte de la estadística se le denomina **muestreo**.

Cuando se trabaja con una parte o subconjunto de la población estadística se define a la porción como **muestra**. Pero no debe ser cualquier parte o subconjunto, sino una que pueda asegurar, de alguna manera, que se obtiene más o menos la misma información que si se trabajara con la población estadística completa, es decir, con una muestra representativa que puede reflejar lo más fielmente posible lo que contiene una población estadística.



Muestreo estratificado

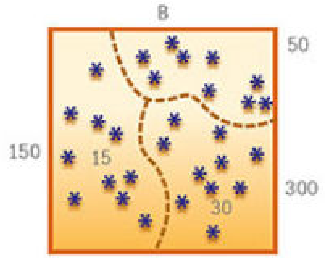
Existen varias formas para elegir una muestra, algunas requieren incluso de modelos matemáticos complejos, pero una forma de lograr equidad en la selección es no establecer criterios previos de selección y dejar la selección al azar. En efecto, la solución es seleccionar los elementos de la muestra con estrategias como las de los sorteos. A este tipo de procedimiento se le denomina **muestreo aleatorio simple.**



Muestreo estratificado

Si la población estadística se divide en grupos de acuerdo con una característica distinta de la variable de interés (por ejemplo, el nivel socioeconómico), se puede conformar la muestra con muestras de cada grupo que conserven la proporcionalidad de acuerdo con los elementos de cada grupo.

Por ejemplo, puede utilizarse para conocer las preferencias musicales a partir de una muestra de 50 trabajadores en una empresa de 500 empleados; es muy probable que haya empleados de distinto nivel socioeconómico, así que la muestra puede contener más elementos de alguno de esos niveles y su representatividad será cuestionada. Entonces se considera la cantidad de elementos de cada nivel: bajo (300), medio (150) y alto (50). Esta muestra tiene la posibilidad de ser más representativa para obtener información más aproximada a la cantidad total. A cada grupo se le denomina **estrato**.



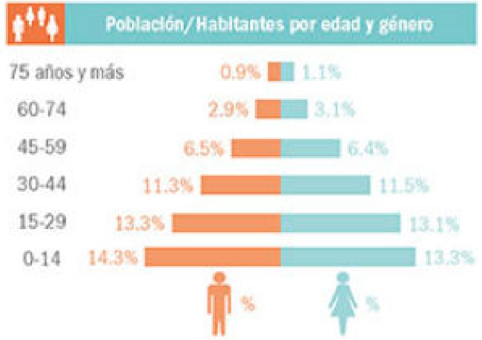
Muestreo estratificado

b) Con tu pareja del ejercicio anterior, discute tres tipos de variables y los valores que tendrían para ser consideradas variables discretas.

	Variables discretas	Valores discretos
1		
2		
3		

c) De acuerdo con la tabla presentada en la sección "¿A dónde llegamos?", indiquen qué variables se consideran continuas: ____. Anota tus conclusiones. ____

Cuando se realiza un censo como los que se llevan a cabo periódicamente en todo el territorio mexicano, se pretende obtener la información total de todos los habitantes, pero de seguro sabrás que eso es muy complejo y casi nunca se logra obtener toda la información posible. Así, el censo busca contar con los datos de toda la población, es decir, de todos los ciudadanos que habitan el país.



En estadística, la población no se conforma con individuos o elementos de flora o fauna, sino que se refiere al conjunto de todos los valores posibles que se obtienen de una variable al aplicar la encuesta o recopilar datos. Por esa razón se habla de **población estadística** y no sólo de población.

Otro aspecto muy importante es que a cada variable le corresponde una población, es decir, con los valores de una variable que se obtienen en su totalidad, se conforma una población estadística, por lo que si se atiende otra variable se estará hablando de otra población estadística.


Población real

Salario
800
1 250
1 250
1 780
1 340
155
2 100

Población estadística

En otras palabras, si una encuesta se aborda género, deporte que se practica y nacionalidad, estamos trabajando simultáneamente de tres poblaciones estadísticas.

Así, en una encuesta o estudio se utilizan diversas variables, por lo que se manejan varias poblaciones estadísticas, a pesar de que sean datos que procedan de una misma fuente.

¿Cuál es la población y cuáles son las poblaciones estadísticas que corresponden a la información contenida en la tabla presentada en la sección "¿A dónde llegamos?". Escribe tus conclusiones.

Aprende con tecnología

En una hoja de cálculo electrónica determina algún tipo de muestreo entre los que has conocido en tus ejercicios y retroalimentaciones de páginas anteriores. Construye una tabla de frecuencias en la que registres el número de hermanos que tiene la mitad del total de los compañeros de tu grupo. Registra en tu cuaderno.

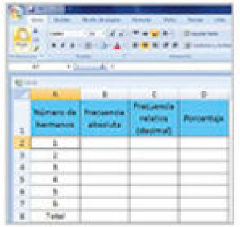
a) ¿Qué fórmula ingresarías en la celda *C2* para calcular la frecuencia relativa en forma decimal?

b) ¿Qué fórmula ingresarías en la celda *D2*, para calcular la frecuencia relativa en forma de porcentaje?

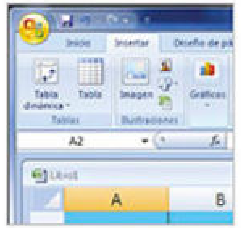
	A	B	C	D
1	Núm. de hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (decimal)	Porcentaje
2	1			
3	2			
4	3			
5	4			
6	5			
7	6			
8	Total			

Una hoja electrónica de datos puede generar las gráficas de un histograma o poligonal a partir de los datos de la siguiente manera. Por ejemplo, para generar un histograma de las veces en que una población de estudiantes acude a la biblioteca.

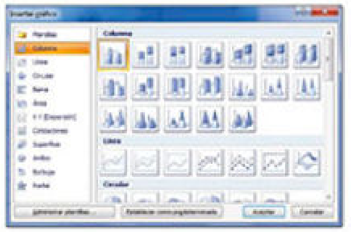
Primero debemos ingresar los datos.



Una vez seleccionada la información se hace clic en ingresar y se elige el tipo de gráfico que se desea generar.



Al insertar el gráfico, es posible editar algunos aspectos de formato o del gráfico.



Utilizo lo que aprendí

1. Reúnete con algunos compañeros fuera de la escuela y elaboren una guía con las siguientes preguntas. Transcríbanla en hojas carta y soliciten al profesor su exposición ante el grupo; así obtendrán también retroalimentación.

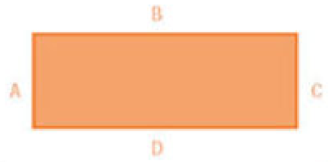
   a) Encuentren la composición de una muestra tomada de 500 jóvenes y que se debe integrarse de cuatro estratos con 225, 145, 110 y 20 elementos cada uno. Si la muestra debe ser de 100, ¿cuántos sujetos se tomarán de cada estrato? Argumenten su respuesta.
   b) Obtengan 5 muestras aleatorias de familiares y vecinos; cada muestra debe tener 6 elementos. Registren sus resultados y compárenlos en el salón.
   c) Analicen si es posible que el tipo de muestreo efectuado para obtener los datos de la tabla presentada en la sección "¿A dónde llegamos?" haya sido estratificado y establezcan un procedimiento para hacerlo. Es importante que registren sus conclusiones.

Prueba tipo PISA

I Perímetro

El perímetro es la suma de las longitudes de todos los lados. En el caso de un rectángulo, como los lados son iguales por parejas, solo hay que sumar longitudes de dos lados y multiplicar el resultado por dos. Esto significa también que la mitad del perímetro es igual a la suma de dos lados no opuestos. Y el área de una figura corresponde a la medida de la superficie que esta ocupa.

1. Considera el siguiente rectángulo, del cual solo se conoce su perímetro y área. A partir de esa información, ¿con cuál de las siguientes expresiones pueden determinarse las medidas de sus lados?
   a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   c) $x^2 + 7x - 10 = 0$
   d) $x^2 - 7x + 10 = 0$



2. La incógnita de la ecuación de la pregunta 1, es precisamente la longitud de uno de los lados que desconocemos del rectángulo. ¿Cuánto miden sus lados?
   a) ancho = 2 cm y largo = 3 cm
   b) ancho = 3 cm y largo = 3 cm
   c) ancho = 4 cm y largo = 3 cm
   d) ancho = 5 cm y largo = 2 cm

3. A partir del rectángulo de la figura 1, ¿con cuál de las siguientes expresiones algebraicas se puede representar el perímetro?
   a) $P = 2AB$ b) $P = 2AC + AD$ c) $P = 2(CD + AD)$ d) $P = 2(AB + CD)$

4. A partir del rectángulo de la figura 1, ¿con cuál de las siguientes expresiones algebraicas se puede representar el área?
   a) $x^2 - 3x + 8 = 0$ b) $x^2 + 3x - 8 = 0$ c) $x^2 - 5x - 24 = 0$ d) $x^2 + 5x - 24 = 0$

II Caída de los objetos

Es muy distinto hasta dónde cae un objeto de qué tan rápido cae. Con sus planos inclinados, Galileo determinó que la distancia que recorre un objeto que acelera uniformemente es proporcional al cuadrado del tiempo. La distancia recorrida por un objeto uniformemente acelerado es:

Distancia recorrida = velocidad inicial × tiempo + $\frac{1}{2}$ (aceleración × tiempo × tiempo)

Esta relación aplica a la distancia de algo que cae y podemos expresarla para el caso de un objeto en caída libre en notación compacta: $D = vt + \frac{1}{2}gt^2$

En la situación de la imagen, los datos que se conocen son: altura del trampolín de 7 metros, velocidad de salida del clavadista 2 m/s, la gravedad la consideraremos como 10 m/s², por lo tanto la incógnita que necesitamos identificar es el tiempo.

5. Considerando la definición de caída libre y los datos que conocemos del clavado, ¿cómo pueden traducirse correctamente al lenguaje algebraico?
   a) $7 = 2x + 5x^2$ b) $5 = 2x + 7x^2$ c) $2 = 7x + 5x^2$ d) $7 = 2x + 5x^2$

6. ¿Cuánto tiempo dura el clavado?
   a) −1.4 segundos   b) −1 segundo   c) 1.4 segundos   d) 1 segundo

III Feria de San Agustín

Este año la Feria de San Agustín está estrenando un nuevo sistema de asignación de premios para sus ganadores. Sin importar cuál sea el juego en el que participen, estos obtendrán su premio dependiendo del color de canica que saquen de una bolsa. Cada uno de los estantes de la feria, muestra la siguiente lista:

Color de la canica	Cantidad
café	10
rojo	8
anaranjado	5
verde	5
amarillo	3
azul	1

7. Al ganar su primer juego, Josefina tiene claro que su premio dependerá del color de la canica que saque de la bolsa. Ella no deja de ver el cartel de los premios y sólo piensa: "¿Qué probabilidad tengo de sacar un oso de peluche?"
   a) 10%   b) 25%   c) 50%   d) 75%

8. El primer concurso en el que Josefina ganó fue el de tiro de dardos en la ruleta giratoria. En este juego ganas si el dardo le pega a un número impar. Tomando en cuenta a la rueda giratoria, ¿qué tan probable es que Josefina gane una taza?
   a) Imposible   b) No muy probable   c) Alrededor de 50%   d) Muy probable

IV Marcos y fotografía

Andrés está buscando en el supermercado un marco rectangular para una fotografía que mide 6 × 15 cm. Al revisar las opciones que ofrece la tienda se da cuenta de que el único marco que hay es de 4.5 × 12 cm.

9. Andrés decide hacer una reducción de su fotografía, ¿con qué razón de semejanza debe pedir la reducción?
   a) Razón de semejanza 0.75   b) Razón de semejanza 0.6
   c) Razón de semejanza 0.5   d) Razón de semejanza 0.25

V Figuras y líneas

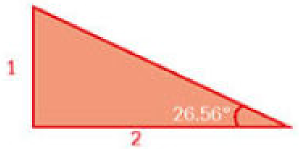
Elena está repasando sus apuntes porque tiene examen de matemáticas. Ayúdala a contestar si las siguientes afirmaciones que hizo son verdaderas o falsas.
   a) Dos figuras semejantes tienen ángulos correspondientes iguales. (Verdadero/Falso)
   b) Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales. (Verdadero/Falso)
   c) Todos los cuadrados son semejantes entre sí. (Verdadero/Falso)
   d) Todos los triángulos rectángulos son semejantes entre sí. (Verdadero/Falso)

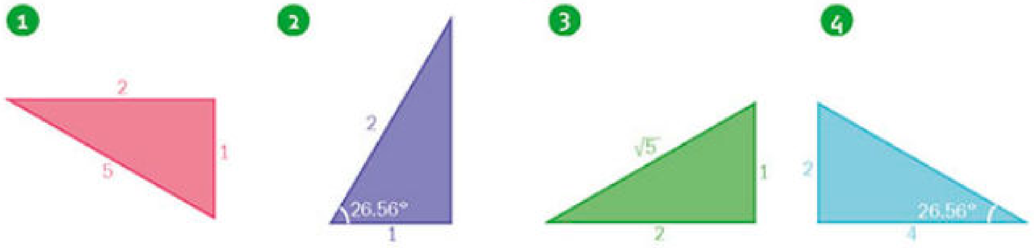
Ponte a prueba

I Lee con atención cada uno de los problemas que a continuación se presentan y elige la respuesta que consideres correcta.

1. Alberto quiere comprar una lona para colocarla como techo en una fiesta. Encontró una cuya área es de 16 m², y un perímetro de 16 m. ¿Cuál es la ecuación cuadrática que corresponde al problema planteado para conocer las dimensiones de la lona? ______________________

2. ¿Cuál es el triángulo congruente con el triángulo rojo?

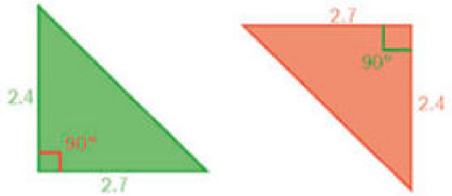




a) Triángulo 1 b) Triángulo 2 c) Triángulo 3 d) Triángulo 4

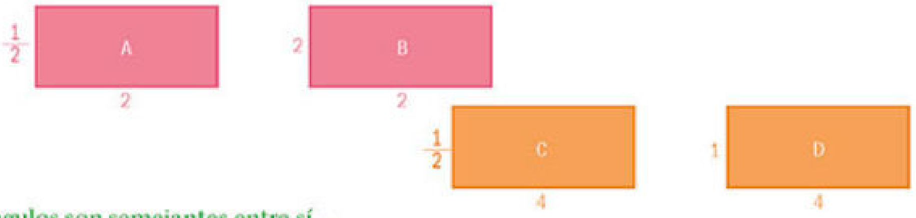
3. De acuerdo a la pareja de triángulos congruentes entre sí, el criterio de congruencia utilizado es:

a) *LLA*
b) *LLL*
c) *ALA*
d) *LAL*



4. Sólo una pareja de rectángulos son semejantes entre sí, ¿cuál?

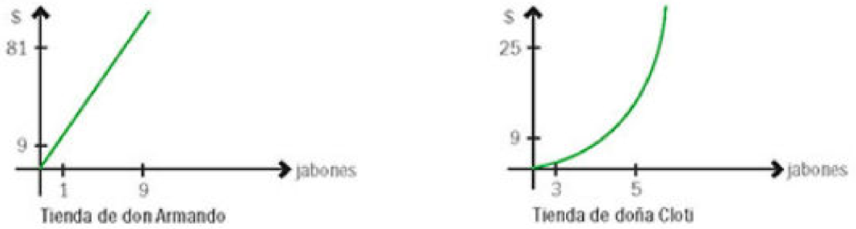
a) *A* y *B*
b) *A* y *D*
c) *B* y *C*
d) *C* y *D*



5. Dos rectángulos son semejantes entre sí…

a) si las longitudes de sus lados correspondientes son proporcionales.
b) si todos sus ángulos correspondientes son iguales.
c) si todos sus ángulos correspondientes son proporcionales.
d) si las longitudes de sus lados correspondientes son iguales.

6. Las siguientes gráficas representan la cantidad de dinero que se debe pagar por cierta cantidad de barras de jabón en tiendas diferentes. ¿En cuál de ellas el total que se debe pagar por el producto es proporcional a la cantidad de barras de jabón adquiridas?



a) En la tienda de don Armando
b) En la tienda de doña Cloti
c) En ambas tiendas
d) En ninguna de las dos tiendas

7. Un avión comercial lleva una rapidez dada por la ecuación $v^2 - 1400v = -490\,000$, donde v es la rapidez media que lleva el avión. Entonces, ¿cuál es la rapidez?

a) 1400 km/h b) 490 000 km/h c) 700 km/h d) 400 km/h

8. Considera un dado de 12 caras que se lanza al aire. ¿Cuál de los siguientes eventos es la pareja de eventos complementarios?

A) "Que caiga un número par"
B) "Que caiga un número mayor que 5"
C) "Que caiga un número impar"
D) "Que caiga un número menor que 5"

a) A y C b) B y D c) A y D d) B y C

9. Dada una baraja de 40 cartas (cuatro palos y de cada palo 10 cartas enumeradas del 1 al 10), considera los sucesos:

A) "Elegir una carta con un número primo"
B) "Elegir una carta con un número mayor que 7"

¿Cuál es la afirmación verdadera?

a) A y B son eventos mutuamente excluyentes porque no pueden ocurrir simultáneamente.
b) A y B son eventos complementarios porque uno complementa al otro para formar el espacio muestral.
c) A y B son eventos mutuamente excluyentes porque pueden ocurrir simultáneamente.
d) A y B no son eventos mutuamente excluyentes porque no pueden ocurrir simultáneamente.

10. ¿Cuál de las siguientes opciones es conveniente seguir para saber la cantidad aproximada de lobos marinos que descansan en una playa?

a) Contar uno por uno a los lobos marinos.
b) Calcular la superficie que ocupa un lobo marino, estimar la superficie de la playa y calcular la cantidad de lobos marinos que caben en ella.
c) Trazar un cuadrado imaginario sobre la playa y contar el número de lobos marinos que hay a lo largo y a lo ancho para luego calcular el producto y saber cuántos hay en total.
d) Contar la cantidad de lobos marinos que descansan sobre una superficie relativamente pequeña elegida al azar, por ejemplo, de unos 9 metros cuadrados; estimar la superficie de la playa y calcular el total aproximado de animales sobre toda la playa.

Bloque 2

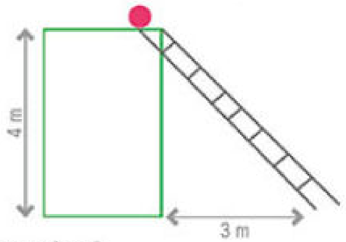
Ejes temáticos	Temas	Secuencia de aprendizaje
Sentido numérico y pensamiento algebraico	1. Patrones y ecuaciones	• Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización
Forma, espacio y medida	2. Figuras y cuerpos	• Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras • Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras
	3. Medida	• Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo • Explicitación y uso del teorema de Pitágoras
Manejo de la información	4. Nociones de probabilidad	• Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada.
- Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Activa tus competencias

Dos niños jugaban con un balón, pero éste voló al techo de una casa contigua. Al acercarse para intentar recuperarlo descubrieron que el techo se encontraba a una altura de 4 metros. Los niños decidieron entonces utilizar una escalera, la cual recargaron en uno de los muros, como se muestra en la figura.



- ¿Qué longitud tenía la escalera?
- Si la pelota estuviera a 5 m de altura, ¿qué longitud tendría que alcanzar la escalera?
- Y si la pelota estuviera a 4 m de altura, y la escalera a una distancia de 2 m de la pared, ¿qué longitud tendría esta última?
- Si los niños utilizaran una escalera de 6.4 m, ¿a qué altura tendría que estar la pelota?
- En este último caso, ¿a qué distancia podría estar la escalera de la pared?

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

1 Patrones y ecuaciones

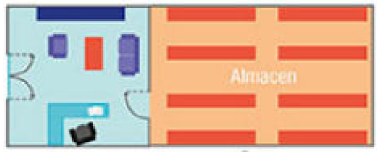
Problemas cuadráticos

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

1 Comienza a pensar

1. Guiados por el profesor, discutan la situación expuesta a continuación y respondan las preguntas posteriores individualmente.

El despacho del ingeniero Zúñiga construirá una oficina y un almacén en un terreno rectangular. Para ello han planeado que la primera debe quedar en una sección cuadrada y al fondo, el almacén, cuyo ancho será igual al lado del cuadrado de las oficinas, con 8 m de profundidad, pero ambas secciones deben tener la misma área.



¿Qué dimensiones deben tener el cuadrado donde se construirán las oficinas y el rectángulo donde se construirá el almacén?

a) Propón una expresión matemática para las relaciones del problema y resuélvelo.

b) Comparen su expresión y discutan si son o no similares.
   i) Si hubo diferencias, ¿cuáles fueron? ______________________
   ____

c) ¿La expresión que escribiste te ayuda a obtener la solución? _______ Analicen en grupo si hubo otras expresiones útiles para encontrar la longitud del lado del cuadrado y anótenlas en su cuaderno.
   i) Después de analizar las expresiones, ¿todos encontraron la misma solución? ______________________

d) ¿Habrá otra forma de resolver el problema? ¡Anótala!
____

2. Relaciona el caso anterior con los siguientes y responde.

Caso 1. Matías quiere encontrar un número que elevado al cuadrado dé como resultado 8 veces el valor de dicho número.

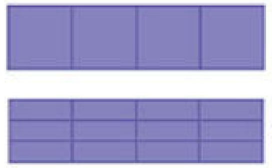
Caso 2. Esperanza sabe que el valor numérico del área de un cuadrado menos 8 veces la longitud de un lado es igual a cero; sin embargo, desea encontrar la longitud del lado del cuadrado.

a) ¿Qué relación hay entre el problema del ingeniero Zúñiga, el de Matías y el de Esperanza?

b) Discute con un compañero cómo resolver los casos de Matías y Esperanza. Encuentra la solución y regístrala en tu cuaderno.

2 Analicemos juntos

1. Reúnanse en parejas, lean y debatan el siguiente planteamiento.



Don Luis, el herrero, considera un diseño para unas ventanas que contendrá dos rectángulos: uno formado con 4 cuadrados y otro con 12 rectángulos de 1 m de lado y el mismo ancho que el lado de los cuadrados.

a) ¿Eso será posible con cualquier cuadrado? _______ Argumenten su respuesta:
____

b) Ahora, encuentren la magnitud del lado del cuadrado. ¿Cuáles son los datos del problema? ______________________

c) Relacionen los datos del problema con una expresión que les permita establecer las relaciones entre los datos y la incógnita.
   i) Encuentren la solución y compárenla con otra pareja.
   ii) ¿Todas fueron iguales? _______ ¿Todos encontraron la misma solución? _______

b)

c)

d) Si hay métodos de resolución diferentes, encuentra similitudes y diferencias entre alguno de ellos y el tuyo.

Método: ____________ Método: ____________

Similitudes	Diferencias

e) Si todos los métodos de resolución fueron iguales, busquen otras formas de resolver el problema. Regístrenlas en sus cuadernos.

f) Finalmente, ¿qué tienen en común los métodos empleados en esta sección y la anterior? Coméntalo en grupo y anótalo en tu cuaderno.

2. Reflexiona acerca de las siguientes preguntas y respóndelas.

a) Si tienes el problema "encontrar un número que tres veces su cuadrado dé como resultado 9 veces el valor de tal número", ¿qué relación tiene con el último problema de la actividad 1? Argumenta:
____

b) ¿Qué relación hay entre el último problema de la actividad 1, el anterior y el que se presenta a continuación: "El valor numérico del área de 6 cuadrados de las mismas dimensiones, es 18 veces el área de un rectángulo cuyas longitudes son 1 unidad y la longitud de un lado de los cuadrados.
____

c) Guiados por el profesor, discutan en el grupo la manera de resolver los problemas de los incisos a) y b). Encuentra la solución a cada uno de ellos; haz las operaciones en tu cuaderno.

3 ¿Adónde llegamos?

En la primera lección del Bloque 1 y en ésta han trabajado con cuadrados y diferentes relaciones entre sus áreas que implican relaciones algebraicas, como:

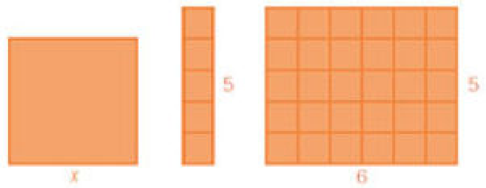
$$x^2 = 16 \qquad x^2 + 5 = 30 \qquad (x + 4)^2 = 36x^2 = 5x \qquad x^2 - 5x = 0$$

Estas expresiones matemáticas pueden relacionarse con configuraciones geométricas en las cuales deben establecerse las condiciones entre las expresiones a cada lado de la igualdad.

1. En equipos, analicen, reflexionen y resuelvan lo siguiente. Recuerden la importancia de aportar ideas y dialogar para obtener acuerdos.

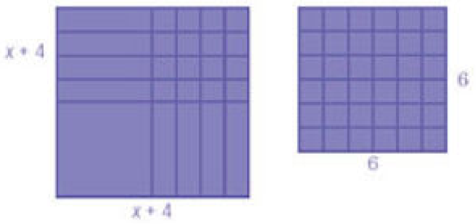
a) Discutan cómo se utilizarían las siguientes figuras para solucionar las siguientes ecuaciones cuadráticas. Concluyan sobre las líneas.

i) $x^2 + 5 = 30$



___

ii) $(x + 4)^2 = 36$

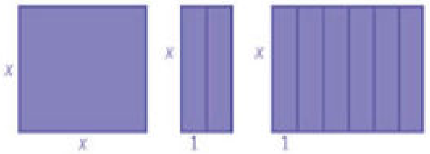


___

b) Hay otro tipo de ecuaciones que pueden resolverse de varias maneras, pero también pueden ser de utilidad los modelos geométricos; por ejemplo:

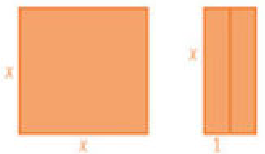
$x^2 + 2x = 6x$

Una configuración asociada sería:

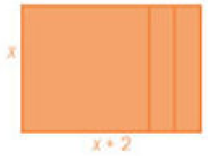


i) ¿Cómo usarían la configuración para resolver la ecuación? Exprésenlo:

c) Si tuvieran la ecuación $x^2 + 2x = 0$, una configuración asociada sería:



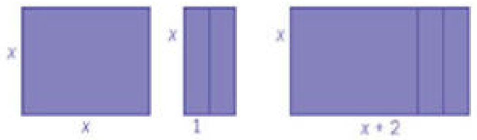
o también



i) ¿Cómo usarían tal configuración para resolver la ecuación? Descríbanlo:

1. Es momento de practicar solo. Si tienes dudas, consulta a tu profesor.

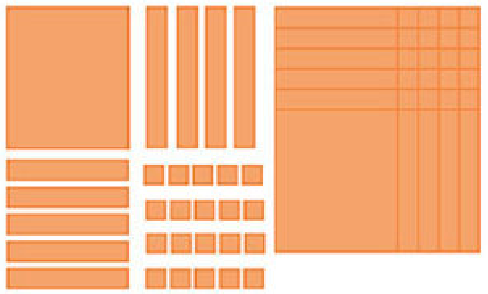
a) Observa:



En este ejemplo, por ser configuraciones que se construyen con el mismo tipo y cantidad de elementos, se entiende que hay una relación entre las expresiones algebraicas correspondientes, a saber: $x^2 + 2x = 0$ y $x(x + 2) = 0$.

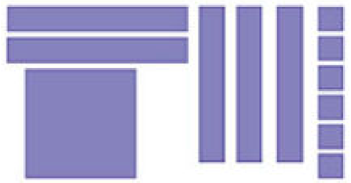
i) ¿Cuál es tal relación? ___

b) En el siguiente caso, la pregunta es: ¿cuándo el área de un rectángulo es igual a cero? Por ejemplo, la ecuación: $x^2 + 9x + 20 = 0$ es la misma que $(x + 5)(x + 4) = 0$, porque:

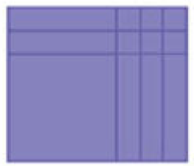


Hay que determinar que no todas las ecuaciones pueden relacionarse de manera sencilla. Este tipo de situaciones es el equivalente a pensar si con las piezas que relacionan una ecuación como:

$x^2 + 5x + 6 = 0$



Se puede construir un rectángulo:



i) ¿Qué condición deben cumplir el coeficiente de x y la constante para que esto sea posible? ___

Factorizar una expresión algebraica significa escribirla como producto de sus factores.

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) \qquad (x + 2)(x - 3) = x^2 - \overset{\text{Factores}}{3x} + 2x - 6 = x^2 - x - 6$$

Glosario

Factorización. Consiste expresar un objeto o número (por ejemplo, un número compuesto, una matriz o un polinomio) como producto de otros objetos más pequeños (factores), (en el caso de números debemos utilizar los números primos) que, al multiplicarlos todos, dan como resultado el objeto original. Por ejemplo, el número 15 se factoriza en los números primos 3 × 5; y $a^2 - b^2$ se factorizan como binomio conjugado $(a - b)(a + b)$. Tomado de http://goo.gl/4U8hb (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Factores. Son los números que se multiplican para obtener otro número; por ejemplo: 3 y 4 son factores de 12, porque 3 × 4 = 12. También 2 × 6 = 12, por lo tanto 2 y 6 también son factores de 12, y 1 × 12 = 12, luego 1 y 12 también son factores de 12. Todos los posibles factores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Tomado de http://goo.gl/wx69R (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Conexión matemática

Indaga cómo puede obtenerse un valor de la aproximación de una raíz de manera gráfica con regla y compás empleando la media geométrica.

En la página web http://goo.gl/qZfyH (consultado el 2 de diciembre de 2016) podrás descargar un archivo que te será de gran ayuda.

c) Discute el problema con tu compañero más cercano y anota tus conclusiones.

____

____

d) Identifica en cuál de los siguientes casos es posible factorizar la expresión original y utilízala para resolver la ecuación correspondiente:

i) $x^2 + 5x = 0$
ii) $x^2 + 7x + 14 = 0$
iii) $x^2 + 8x + 15 = 0$

Algo por aprender

Hay varias formas de resolver una ecuación cuadrática, y de acuerdo con la que se emplee, el método varía; por ejemplo, en una ecuación donde la incógnita aparece elevada al cuadrado como máxima potencia de esta.

En los casos, como:

$$x^2 = 144$$
$$x = -12 \mid x = 12$$

Una variante de este tipo de ecuaciones es:

$$x^2 + 7 - 7 = 88 - 7$$
$$x^2 = 81$$
$$x = -9 \mid x = 9$$

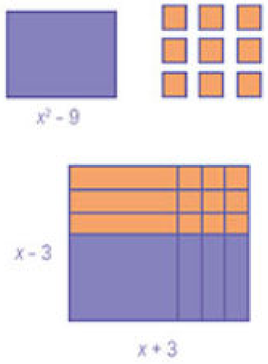
Otra variante es:

$$(x + 7)^2 = 169$$
$$x + 7 = -13 \mid x + 7 = 13$$
$$x + 7 - 7 = -13 - 7 \mid x + 7 - 7 = 13 - 7$$
$$x = -20 \mid x = 6$$

Los casos anteriores pueden verse como especiales de una factorización conocida: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, de tal forma que si $x^2 - a^2 = 0$ es lo mismo que $(x - a)(x + a) = 0$.

Sin embargo, un producto de dos números es igual a cero si, y sólo si, uno o los dos factores son cero; es decir, las soluciones serán $x = a$ o $x = -a$.

Una configuración geométrica relacionada con este planteamiento también tiene que ver con la construcción de un rectángulo con piezas dadas; por ejemplo, $x^2 - 9 = 0$:



Es posible que en tu curso de *Matemáticas II* hayas empleado fichas de colores para analizar las operaciones de números con signo. Si no fue así, solo debes recordar que fichas iguales de colores diferentes hacen un equilibrio o un cero y que ya se conoce la multiplicación de números con signo. Recordar este ejemplo servirá para recuperar el tema del número y su inverso aditivo, útiles también en esta sección. Así con las fichas que representan a $x^2 - 9 = 0$, puede construirse un rectángulo de lados $x - 3$ y $x + 3$, y su área es representada por $(x - 3)(x + 3)$, la cual únicamente puede ser cero si alguno de los lados es cero o ambos lados son cero, lo cual nos conduce a la solución, pues $x - 3 = 0$ o $x + 3 = 0$, así que las soluciones serán: $x = 3$ o $x = -3$.

Analicemos otro tipo de factorizaciones incluso con tipos de números diversos:

$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x + 4)(x - 4) = 0$$
$$x + 4 = 0 \text{ o } x - 4 = 0$$
$$x = -4 \text{ o } x = 4$$

$$x^2 - \frac{4}{9} = 0$$
$$(x + \frac{2}{3})(x + \frac{2}{3}) = 0$$
$$x + \frac{2}{3} = 0 \text{ o } x - \frac{2}{3} = 0$$
$$x = -\frac{2}{3} \text{ o } x = \frac{2}{3}$$

$$x^2 - 5 = 0$$
$$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$$
$$x + 2.24 \approx 0 \text{ o } x - 24 \approx 0$$
$$x \approx 2.24 \text{ o } x \approx 2.4$$

Sin embargo, es más sencillo hacer este tipo de factorizaciones cuando el coeficiente de la incógnita y la constante son números enteros.
Las ecuaciones del tipo: $x^2 = ax$, $x^2 - ax = 0$, son iguales, pero se escriben de manera diferente.

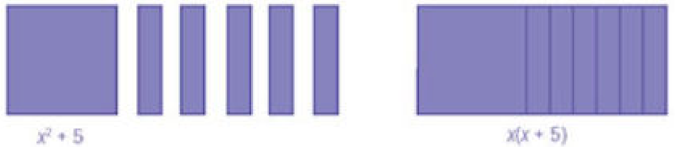
Aprende de los errores

¿Qué le dirías a un compañero si te afirmara que: $x^2 - 33 = (x - 3)^2$? ¿Qué le dirías a otro compañero que escribe: $x(x - 3) = x^2 - 3$?

Comenten las respuestas entre todos y obtengan una conclusión con ayuda de su profesor.

1. En parejas, reflexionen las siguientes situaciones y registren sus conclusiones.

a) Las configuraciones relacionadas son también muy sencillas y pueden implicar números con signo: $x^2 + 5x = 0$



i) Así que la solución será $x = 0$ o $x = -5$. Descubran por qué, coméntenlo y anótenlo: ____________________________

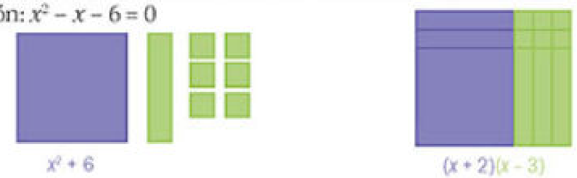
____

b) Con un solo cambio de signo la situación es diferente: $x^2 - 5 = 0$.

i) Así que la solución será $x = 0$ o $x = 5$. Reflexionen y describan por qué:

____

c) Otro aspecto que se ha trabajado es cuando, con las piezas de un caso, podemos formar un rectángulo y de ahí obtenemos las soluciones por factorización: $x^2 - x - 6 = 0$



i) Por la factorización se deduce que las soluciones serán $x = -2$ o $x = 3$. Discutan por qué y anótenlo: ____________________________

____

d) Ahora redacten los pasos que se deben seguir para resolver ecuaciones cuadráticas de este tipo y exprésenlas en el recuadro.

____

____

2. Es tu turno. Analiza las siguientes factorizaciones y responde lo que se pide.

a) Veamos otros casos donde este tipo de factorizaciones permite encontrar las soluciones rápidamente.

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$
$$x^2 + (2 + 4)\,x + (2 + 4) = 0$$
$$(x + 4)(x + 4) = 0$$
$$x + 2 = 0 \text{ o } x + 4 = 0$$
$$x = -2 \text{ o } x = -4$$

$$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$$
$$x^2 + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\right)\, x\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)\Bigg) = 0$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$
$$x + \frac{1}{2} = 0 \text{ o } x = -\frac{1}{3} = 0$$
$$x = -\frac{1}{2} \text{ o } x = \frac{1}{3}$$

$$x^2 - 7.1x + 9.18 = 0$$
$$x^2\big((-1.7) + (-5.4)\big)\,x + \big((-1.7) \times (-5.4)\big) = 0$$
$$(x + 1.7)(x - 5.4) = 0$$
$$x - 1.7 = 0 \text{ o } x - 5.4 = 0$$
$$x = 1.7 \text{ o } x = 5.4$$

b) Redacta los pasos que se deben seguir para resolver ecuaciones cuadráticas de este tipo y exprésalas en el recuadro.

____

____

____

Aprende con tecnología

Para analizar el papel de los coeficientes en una ecuación de segundo grado, leer algunos ejemplos y explicaciones claras referentes al tema puedes consultar la página web: http://goo.gl/OXGVo (consultado el 2 de diciembre de 2016).

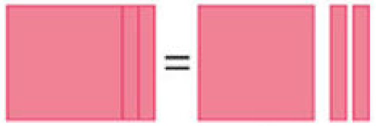
Utilizo lo que aprendí

1. Reúnanse en equipos y copien en una cartulina los ejercicios de esta sección. Luego soliciten a su profesor la oportunidad de debatir las soluciones en grupo.

a) Encuentren las dimensiones de un cuadrado que tenga el valor numérico de su área igual al valor numérico de su perímetro.

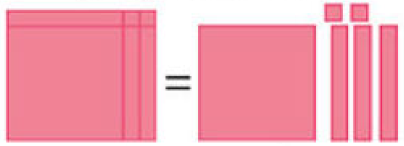
b) Analicen los siguientes casos, en los que se plantean diferentes tipos de factorizaciones.

$x(x + 2) = x^2 + 2x$



Encuentra la solución de $x^2 + 2x = 0$

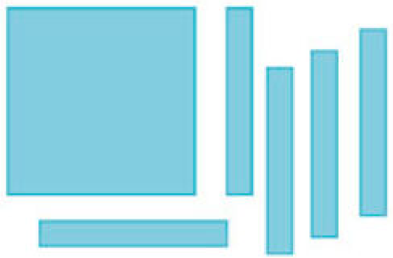
$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$



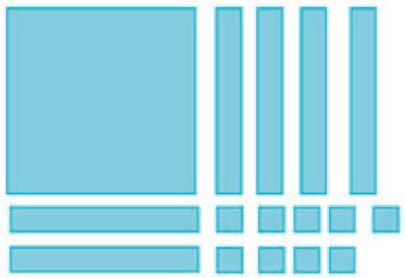
Encuentra la solución de $x^2 + 3x + 2 = 0$

c) Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones, ayúdate con las configuraciones geométricas siguientes:

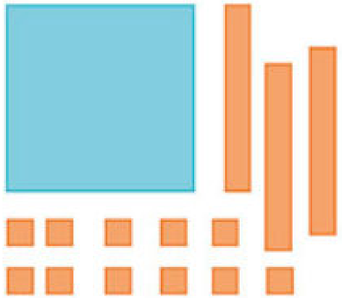
i) $x^2 + 5x = (\quad)(\quad)$



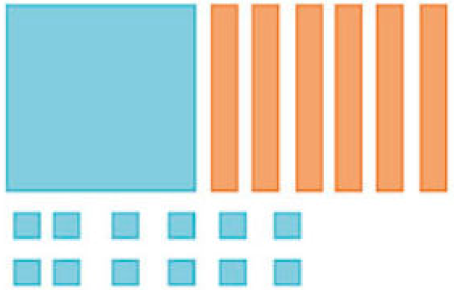
ii) $x^2 + 7x + 12 = (\quad)(\quad)$



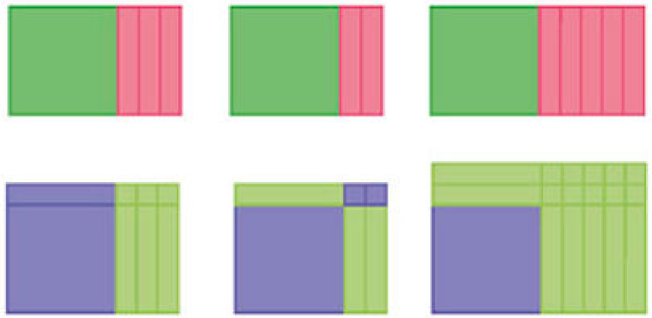
iii) $x^2 - 3x - 10 = (\quad)(\quad)$



iv) $x^2 - 6x + 9 = (\quad)(\quad)$



d) Indiquen una ecuación con la que se relacionen cada una de las siguientes configuraciones geométricas.



e) Encuentren un modelo geométrico para las siguientes ecuaciones.

$x(x - 12) = 0$ $\quad x^2 + 3x = 0$ $\quad x^2 + 5x + 4 = 0$ $\quad x^2 - 7x + 10 = 0$

f) Resuelvan las siguientes ecuaciones cuadráticas empleando una factorización; utilicen los métodos abordados y determinen por qué, en algunos casos, pueden utilizarse varios de ellos.

$2x(x + 5) = 0$ $\quad 5x^2 - 25x = 0$ $\quad x^2 + 11x + 30 = 0$ $\quad x^2 - 2x - 15 = 0$

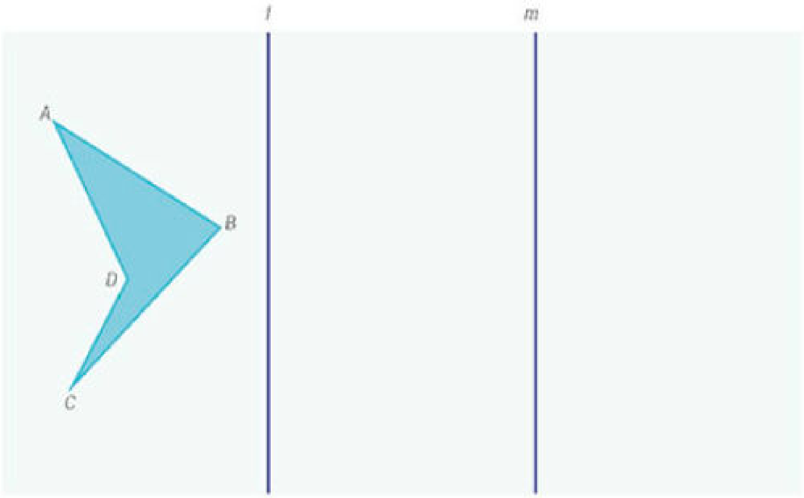
2 Figuras y cuerpos

Rotación y traslación de figuras

Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

1 Comienza a pensar

1. Con base en la siguiente figura y las rectas paralelas *l* y *m*, comenten y hagan en grupo lo que se solicita guiados por el profesor. Anoten sus respuestas una vez que hayan llegado a un acuerdo.



a) Tracen la figura simétrica al cuadrilátero *ABCD*, con respecto a la recta *l*, así se formará la figura *A'B'C'D'*.
b) Ahora tracen la figura simétrica al cuadrilátero *A"B"C"D"*, con respecto a la recta *m*.
c) Midan las distancias de los segmentos unidos por la parejas de puntos *AA"*, *BB"*, *CC"* y *DD"*. ¿Cómo son entre sí dichas medidas? ______________________

____

d) ¿Cómo son entre sí, respecto a su posición, los segmentos *AA"*, *BB"*, *CC"* y *DD"*?______________ ¿Por qué? ______________________

____

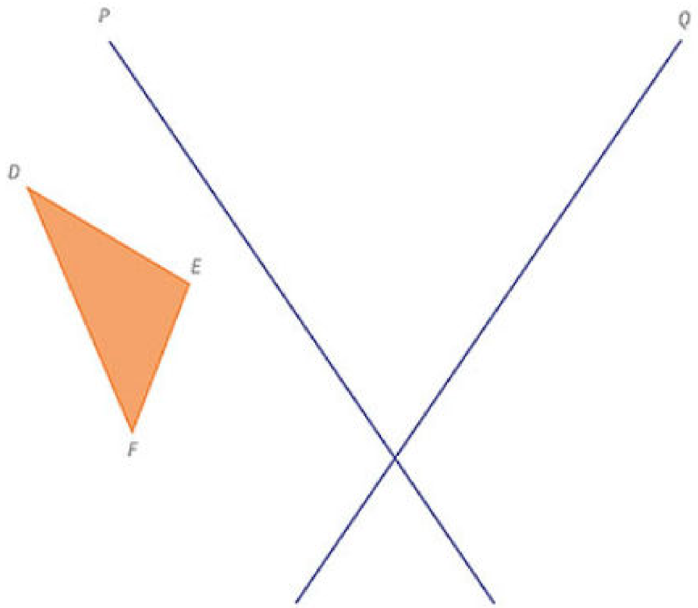
e) Si desearan construir la figura *A"B"C"D"* sin construir de manera intermedia la figura *A'B'C'D'*, describan y representen el procedimiento que deben seguir:

____
____
____
____

2 Analicemos juntos

1. Analiza el siguiente caso y resuelve las preguntas posteriores.

a) Observa las rectas *p* y *q*, que no son paralelas.



b) Traza la figura simétrica al triángulo *DEF* con respecto a la recta *p*, con lo que se formará el triángulo *D'E'F'*.
c) Ahora traza la figura simétrica a *D'E'F'* con respecto a *q*, para formar el triángulo *D"E"F"*.
d) Utilizando tu compás y considerando *O* como el punto donde se cortan las rectas *p* y *q*, traza los arcos que unan los puntos *D* y *D"*, *E* y *E"* y *F* y *F"*.
   i) ¿Por qué estas parejas de puntos están sobre los mismos arcos de circunferencia? ______________________

   ____

e) Mide el ángulo que forman, *DOD"*, *EOE"* y *FOF"*, ¿cómo son entre sí sus medidas? __________ ¿Por qué? ______________________

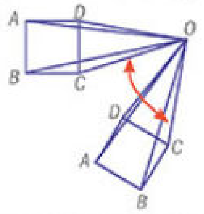
____

f) Describe un procedimiento pata trazar la figura *D"E"F"* a partir de la figura *DEF*, sin tener que usar la figura *D'E'F'* ni las rectas *p* y *q*. Represéntalo gráficamente.

____
____
____
____

Glosario

Rotación. En una figura geométrica, se presenta como un movimiento angular de cada uno de los puntos de esta, a partir de un punto que representará su centro de giro, sobre el que girará hacia donde se determine.
Para este movimiento es necesario dar un ángulo y el punto centro (O) de giro.



Conexión matemática

¿Qué tal si interactúas con algunos ejemplos en la red al tiempo que lees y reflexionas con otras versiones del concepto de rotación y sus aplicaciones? Ve a http://goo.gl/jgScY (consultado el 2 de diciembre de 2016) y explora los casos expuestos. Fortalecerás tu aprendizaje sobre el tema.

3 ¿Adónde llegamos?

1. Con base en las construcciones y cuestionamientos que se presentaron en las secciones anteriores de esta lección, reflexiona y responde lo siguiente.

   a) Anota las diferencias y similitudes que experimentaste al construir la primera y la tercera figura de cada caso:

	Similitudes	Diferencias
De la figura que se obtuvo en cada caso después de aplicar dos veces la simetría:		
Respecto de la posición de la figura que se obtuvo en cada caso después de aplicar dos veces la simetría:		
En cuanto a las distancias entre los puntos homólogos de ambas figuras:		

   b) Si tuvieras que poner un nombre a la transformación entre las figuras original y tercera, obtenida en ambos casos por la aplicación de dos simetrías consecutivas, ¿cómo llamarías al a transformación de la figura *ABCD*, para convertirse en *A'B'C'D'*? ______________________

      i) ¿Cómo lo describirías para alguien que quisiera aplicar dicho cambio o transformación a cualquier figura?

      ____

      ____

   c) ¿Cómo llamarías a la transformación de la figura *ABCD* para convertirse en *A'B'C'D'*? ______________________

      i) ¿Y cómo lo describirías si alguien quisiera aplicar dicho cambio o transformación a cualquier figura?

      ____

      ____

Aprende con tecnología

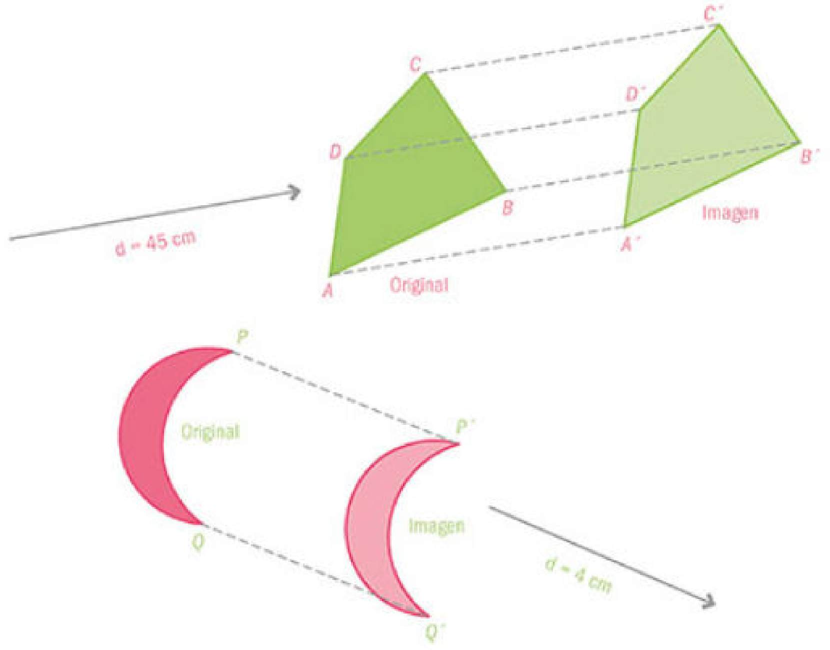
Para reforzar tus conocimientos sobre el tema de la rotación y traslación de figuras con otras versiones de los conceptos, además de practicar con nuevos ejemplos y ejercicios es importante que experimentes con recursos didácticos fuera del aula, como la página: http://goo.gl/aXSwc.

Además puedes seguir el desarrollo sobre el tema propuesto mediante videos, lo cual te servirá para observar y analizar en tiempo real, la resolución de problemas de este tema. Visita la página: www.estudiaraprender.com/2011/12/14/propiedades-de-rotacion-y-traslacion-de-figuras/ (consultados el 2 de diciembre de 2016).

4 Algo por aprender

Traslación

Observa las siguientes figuras:



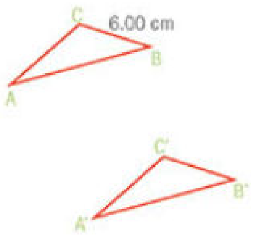
Puedes mover o trasladar una figura en la dirección que desees y obtener así una "copia" o imagen de la original, pero en una ubicación distinta de ella.

1. En grupo, comenten el siguiente caso y luego, de forma individual.

   Dibuja una figura como un cuadrilátero o una montaña en el siguiente espacio, después cópiala en papel transparente –para que la copia sea igual al original– y desliza la copia en cualquier dirección; con ello haces una traslación.

Glosario

Traslación. Desplazamiento directo de una figura geométrica a lo largo de una trayectoria recta, moviendo cada uno de sus puntos en una sola distancia y dirección. En este deslizamiento, la figura no rota ni se voltea, sólo cambia de lugar, es decir, luce exactamente igual, sólo que en un sitio contiguo al que tenía de origen. El siguiente rombo *ABCD* se trasladó horizontalmente, con una magnitud de desplazamiento de 5 cm:



Respecto al punto y su trasladado se dice que son homólogos.

Los puntos que constituyen la figura original se mueven la misma distancia a lo largo de trayectorias paralelas (la misma dirección), a partir de lo cual se genera la imagen. Observa las figuras al inicio de esta sección. La flecha de la figura indica la distancia (*d*) que se movió cada punto de la figura original y la dirección en la cual se hizo el movimiento.

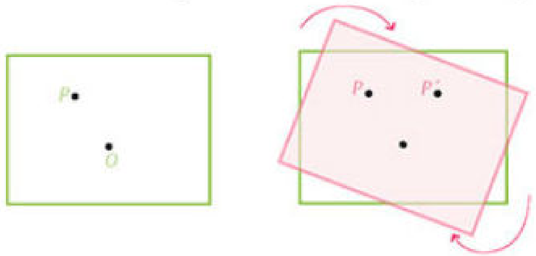
Rotaciones

2. En parejas, copien el siguiente ejercicio en una hoja tamaño oficio y háganlo. Luego sugieran al profesor que guíe una sesión grupal para comentar el caso.

Pasos:

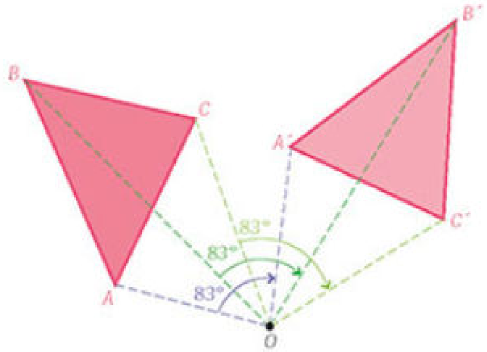
- En su material señalen un punto *P* y un punto *O*.
- Copien dichos puntos en otra hoja transparente, de preferencia de papel albanene o cebolla.
- En la hoja transparente fijen el punto *O* colocando sobre él un alfiler y giren el punto *P* hacia la derecha, encontrando lo que será el punto *P'*.

De este modo el punto *P'* es la imagen del punto P bajo una rotación con centro en *O*.



Cuando se hace la rotación de una figura sucede lo mismo con cada uno de sus puntos: todos giran con el mismo ángulo, pues se mantiene constante. Todos los puntos de la figura rotan a partir de un punto fijo denominado **centro de rotación**, de tal modo que en la rotación deben considerarse el punto fijo y el **ángulo de rotación**.

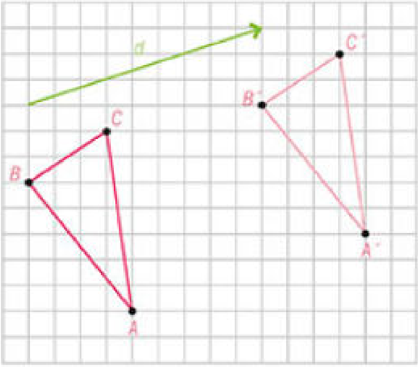
En una rotación **se conservan todas las medidas** de la figura relacionadas con distancias o ángulos; la **imagen resultante** es igual que la original, pero en otra posición. Por ejemplo, en la figura de abajo cada uno de los puntos del triángulo *ABC* se ha rotado 83° tomando el punto fijo *O* como centro de rotación.

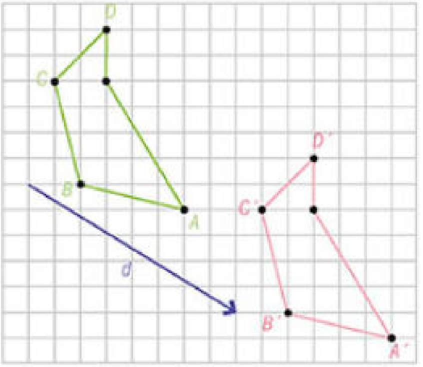


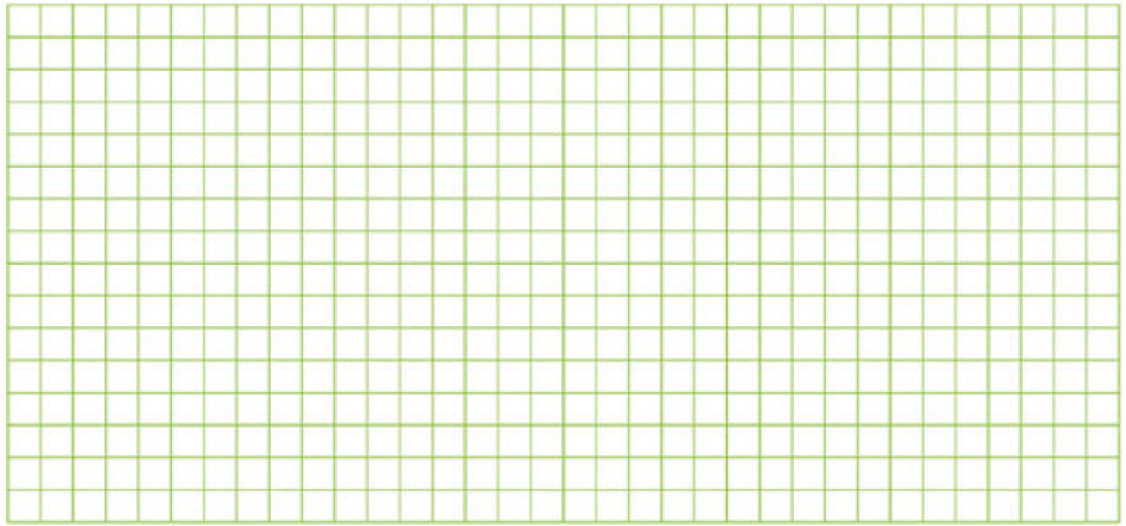
Utilizo lo que aprendí

1. Reúnanse en parejas y resuelvan los ejercicios expuestos a continuación. Recuerden la importancia de generar consensos para llegar a acuerdos.

   a) En el recuadro cuadriculado, hagan las siguientes traslaciones de figuras. Para ello deben definir la flecha que indica hacia dónde se mueven y la distancia del movimiento; observa la figura.







i) ¿Qué distancia se movieron las figuras? ____________________

ii) ¿En cuál dirección respecto a la horizontal? ____________________

b) En una traslación:

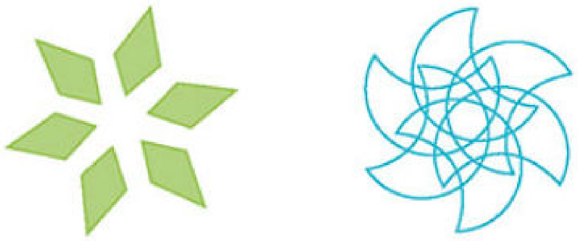
i) ¿Se modifican distancias entre puntos de la figura? ________ Argumenten su respuesta: ____________________

____

ii) ¿Se modificará el área que cubre la figura? ____________ ¿El perímetro? ________ Argumenten su respuesta: ____________________

iii) ¿Se modifica la medida de los ángulos de la figura? ________ ¿Se imaginan por qué? ____________________

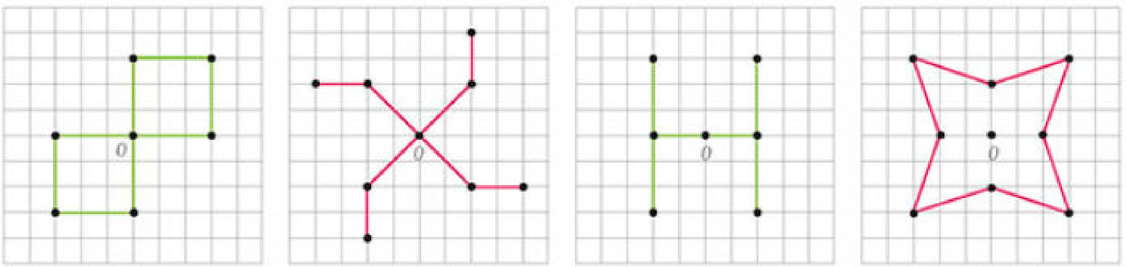
c) Con base en rotaciones, construyan los siguientes símbolos. Además señalen dónde ubicarán el centro de rotación y cuáles serán los ángulos de giro.



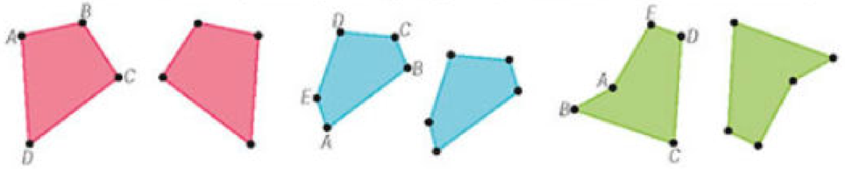
d) Investiguen cómo elaborar el símbolo del *yin yang*, y de igual manera determinen su centro de rotación y los ángulos de giro. Sobre las líneas escribe algo acerca de su origen.

e) ¿Cuál de las siguientes figuras será la misma después de las siguientes rotaciones?

90° 90° 180° 270°

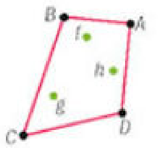


f) Observen las siguientes figuras y determinen, para cada caso, el tipo de transformación que se aplicó al polígono (rotación, traslación o reflexión).

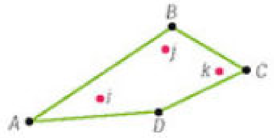


g) En una hoja de papel, roten las siguientes figuras con los ángulos que se indican y cada uno de los centros de rotación dados.

- $f = 35°$
- $g = 75°$
- $h = 150°$



- $i = 85°$
- $j = 115°$
- $k = 220°$



Combinación de transformaciones geométricas

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

1 Comienza a pensar

1. Guiados por el profesor, lean y comenten la siguiente información; después resuelvan individualmente la práctica.

El papel picado es un producto artesanal que se trabaja en México desde hace algunos siglos y sirve para decorar el ambiente en festividades tradicionales como el Día de Muertos, que se celebra en los primeros días de noviembre. Se elabora recortando figuras en papeles de colores –generalmente en papel de China–, lo que resulta en vistosos diseños conformados por los huecos dejados en el material al recortarlo. Florituras (adornos), grecas (adorno que repite la misma combinación de elementos decorativos), signos o cualquier ornamento puede apreciarse cuando el papel, ya diseñado, es extendido y exhibido colgado o descansando sobre mesas o paredes.

Ahora experimentemos con algunas de las técnicas que se utilizan en el diseño de papel picado. Iniciemos con una hoja de papel de color doblado por la mitad. Después marquemos la recta que divide el material en partes iguales.

A continuación recorta alguna figura sobre el doblez. Es importante que cortes solo la mitad de la forma que hayas elegido, pues al desdoblar la hoja se generará automáticamente la figura en su totalidad.

Glosario

Simetría rotacional. Se presenta en una figura plana cuando podemos encontrar un centro (centro de rotación), de manera que al girar la figura completa a un cierto ángulo (mayor o igual a 0° y menor que 360°), la figura rotada coincide con la figura original.

En esta, a cada punto le corresponde otro punto (punto rotado o imagen) a la misma distancia del centro, de forma que el ángulo que forman ambos con el centro de rotación es siempre el mismo. El número de veces que se puede hacer coincidir la imagen rotada con la figura original se llama *orden de la rotación.*

Cualquier figura tiene al menos una simetría rotacional de orden 1 alrededor de cualquier punto que elijamos como centro, pues basta elegir como ángulo de rotación 0° (es decir, dejar la figura como está), como ocurre con las técnicas del papel picado.

Tomado de: http://www.diverticiencia.net/SabiasQue/Simetrias/SimetriaRotacion.html, (consultado el 22 de enero de 2017).

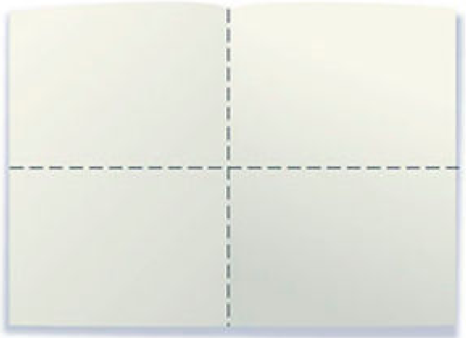
a) ¿Por qué la parte que recortaste en la hoja doblada, al desdoblarla, es igual a la del otro lado?

____

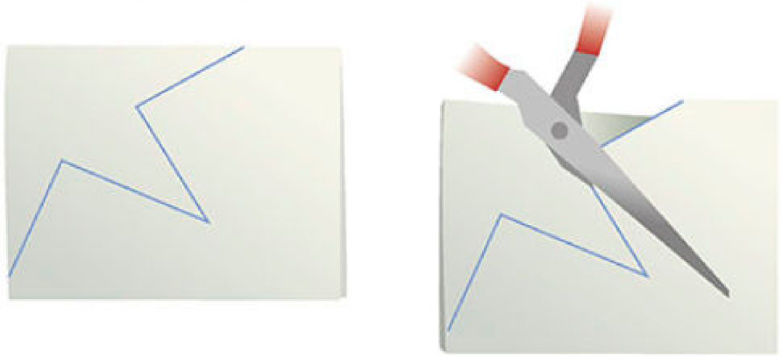
b) ¿Qué tipo de transformación geométrica permite que al desdoblarlo se genere un diseño?

____

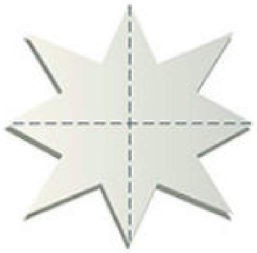
A continuación divide otra hoja en cuatro partes mediante dos rectas perpendiculares entre sí, con su punto de intersección exactamente al centro.



Ahora dobla la hoja en cuatro partes iguales, sin perder de vista en cada doblez el punto donde se cortan las líneas punteadas. Dibuja alguna figura de tal forma que al recortarla y desdoblar la hoja se genere un diseño. Puedes reproducir el del siguiente ejemplo o generar el tuyo.



Después desdobla la hoja y observa la forma de la figura final.



Como podrás observar el diseño se compone de 4 figuras iguales, las cuales tienen ciertas posiciones entre sí.

2. Comenta con un compañero lo experimentado con la figura anterior y contesta.

a) ¿Cómo son entre sí, respecto a la recta punteada vertical, las figuras *I* y *II*?

____

b) ¿Qué pares de figuras (*I, II, III* y *IV*) son simétricas y con respecto a qué recta?

____

c) ¿Qué movimiento debe hacer para que la figura *II* para ocupar el lugar de la *III*?

____

d) Las figuras *I* y *IV* están relacionadas entre sí por una rotación, ¿cuál es el ángulo de rotación?

____

3. Consigue medio pliego de papel de China y dóblalo a la mitad. En tu casa, repite la práctica anterior: recorta una figura sobre el doblez en cuatro partes. Puedes compartir la dinámica con algún familiar.

a) Simula en el siguiente espacio tu trabajo y marca con *I, II, III* y *IV* cada una de las figuras que se formaron al desdoblar el material.

i) En tu diseño, ¿obtuviste figuras simétricas al desdoblar el papel? ______ Argumenta tu respuesta:

____

____

____

____

Aprende con tecnología

Puedes explorar otros recursos didácticos que te servirán para conocer nuevas perspectivas sobre el tema mediante ejemplos y ejercicios, en la página web: http://goo.gl/Gs2NX (consultado el 2 de diciembre de 2016).

2 Analicemos juntos

1. Analiza el siguiente caso y responde las preguntas posteriores. Después coméntenlo en sesión grupal guiada por el profesor.

   a) También puedes construir reflexiones mediante dibujos en un papel traslúcido. Traza la figura original y dobla el papel en la parte que desees, cuidando que el pliegue no atraviese la figura. Tras calcarla, desdóblala y observa el resultado.

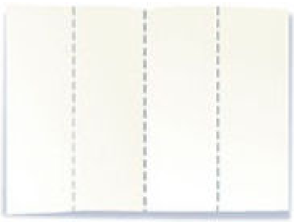
   i) ¿Cómo se llama la recta que se formó con el doblez del papel? ________

   ____

   Escribe instrucciones para construir reflexiones empleando dos hojas de papel transparente. ____

   ____

   ____



   Al doblar el papel también podríamos generar no sólo reflexiones o rotaciones, sino alguna traslación. Por ejemplo, si doblas la hoja en cuatro partes, ¿cómo puede generarse la traslación de una figura por medio de recortes o dibujos en papel transparente?

   b) Traza un triángulo, rombo o cualquier figura plana y haz la traslación. ¿Cómo lo hiciste? Descríbelo a continuación.

   ____

   ____

   ____

   ____

   c) Consigue media hoja cuadriculada, divídela y dóblala en seis partes iguales que a su vez numerarás de izquierda a derecha, punteando además cada doblez. Traza una figura y propón una traslación en diagonal, desde la parte *I* hasta la *VI*.

   i) Describe el procedimiento que utilizaste:

   ____

   ____

   ____

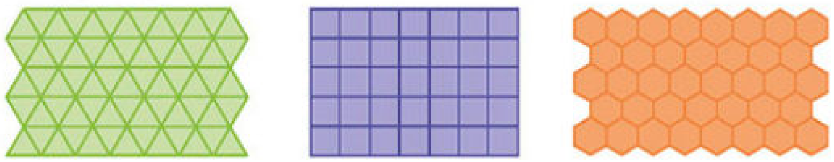
   ____

3 ¿Adónde llegamos?

1. Lee y comenta con tu grupo la siguiente información. Después responde.

   Hay tapices con diseños muy sencillos, cuya constante es la repetición de la misma figura. Se dice que una **teselación** es **regular** si se hace con polígonos regulares. Observa estos tres ejemplos:

   Triángulos equilateros — Cuadrados — Hexágonos



   a) ¿Habrá otros polígonos regulares con los que también se puedan hacer teselaciones regulares? ________ ¿Cuáles? ________________

   ¿Por qué? ____

2. Reunidos en cuartetos, comenten y después describan en sus cuadernos las combinaciones de simetrías, rotaciones o traslaciones hechas en cada figura (1 a 4) para construir el diseño.

   a) Observa los siguientes diseños de tapices que combinan distintos polígonos.

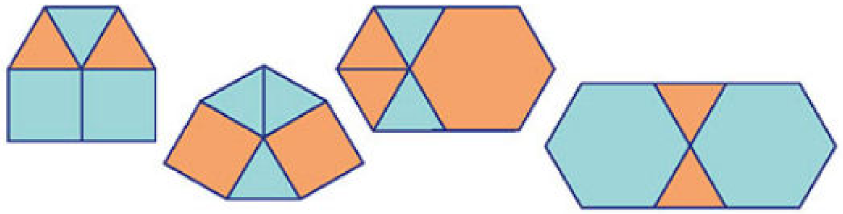


   Figura 1 — Figura 2 — Figura 3 — Figura 4

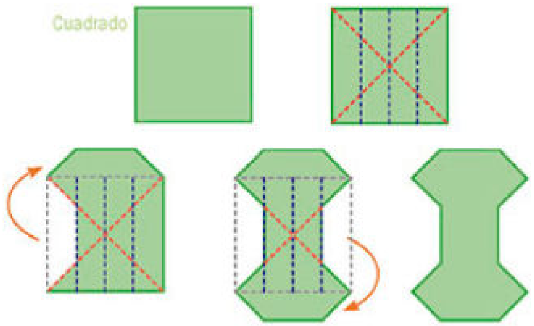
   b) Una vez que elaboren sus descripciones, compárenlas con las de otros cuartetos y con ayuda de su profesor validen sus conclusiones. Regístrenlas a continuación.

   ____

   ____

También se puede tapizar o recubrir la figura, modificando el contorno inicial.

Por ejemplo, considera el antiguo diseño nazarí conocido como "el hueso", cuyo trazo parte de un cuadrado. Con base en los pasos que observas en la figura 4 escribe las instrucciones para que, a partir del cuadrado, se obtenga el hueso.

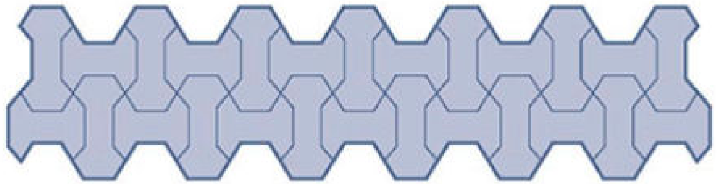


Conexión matemática

En la dirección electrónica http://goo.gl/8gSTv puedes apreciar algunos mosaicos de un famoso artista llamado M.C. Escher, los cuales tienen dentro de sí reflexiones, traslaciones y rotaciones para generar bellísimos diseños. Aquí algunos ejemplos:

A la vez que se exponen, también se indican las transformaciones que se van efectuando, es decir, si se trata de una rotación, traslación o reflexión.

El dibujo resultante se utiliza para generar el tapiz que se muestra a continuación. En él, la forma de un hueso es evidente y está presente en toda la composición.



c) ¿Qué transformaciones se aplicaron al hueso original para hacer este tapiz?

____

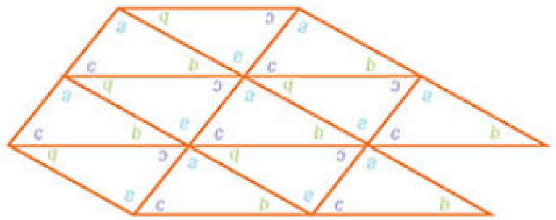
____

____

3. Llegó el momento de que practiques solo. Si surge alguna duda, recurre a tu profesor.

a) Forma una teselación usando triángulos equiláteros (tres ángulos y tres lados iguales).

b) Observa tu teselación (*A*) y la siguiente (*B*).



i) ¿Cuántas veces cabe el triángulo alrededor de cada punto de rotación en las teselaciones?

(*A*) ________ (*B*) ________

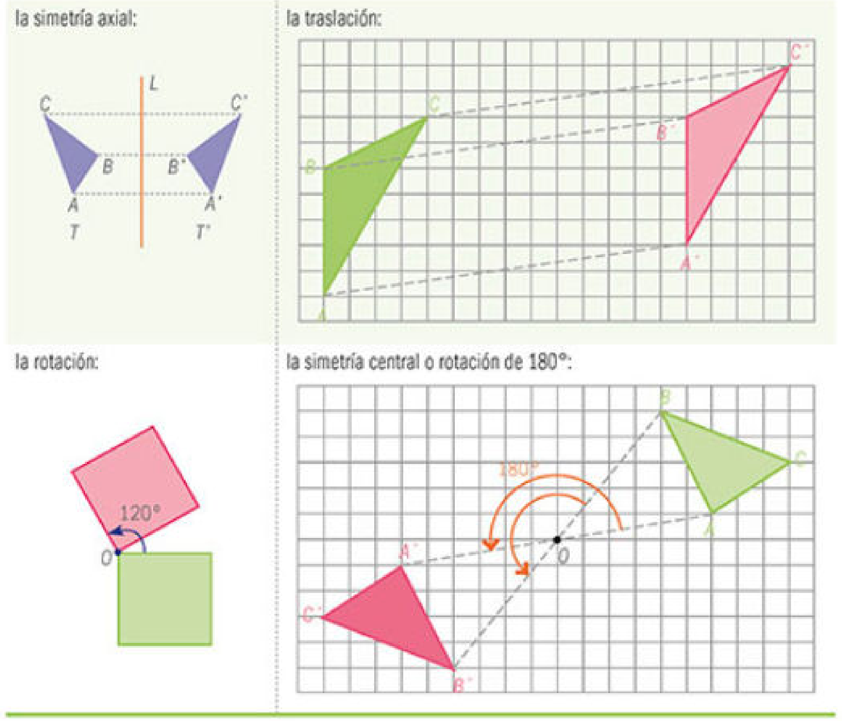
c) ¿Podrías crear una teselación que use un triángulo isósceles? ________ Inténtalo en tu cuaderno y ve qué sucede.

i) ¿Todos los triángulos pueden acomodarse en teselaciones? ________ ¿Por qué? ____

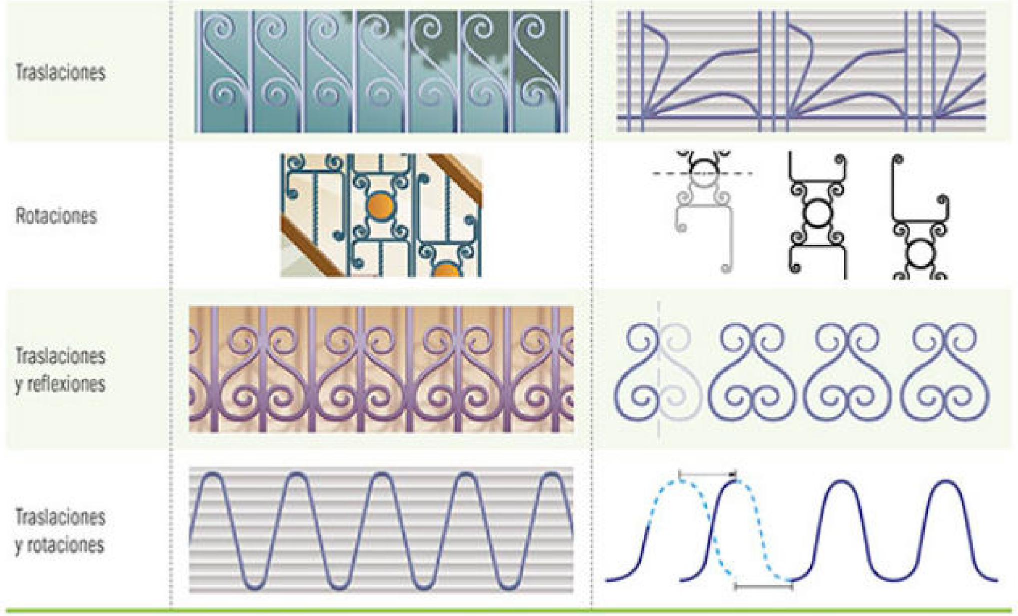
____

Algo por aprender

Transformaciones geométricas como…



Están presentes en diversos diseños que podemos observar en el mundo que nos rodea, por ejemplo:



Conexión matemática

En el sitio web http://goo.gl/ytvmh (consultado el 2 de diciembre de 2016) puedes descargar un archivo PDF, tan ilustrativo como breve, sobre algunos tipos básicos de teselaciones: regulares y semirregulares. Incluso, puedes imprimir la hoja y calcarlos por separado para que experimentes con su trazo.

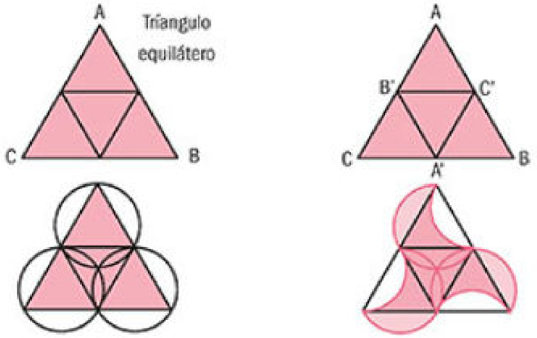
Glosario

Diseño nazarí. Arte de base matemática en cuya composición se usan ramas mixtilíneas (lados rectos y curvos a la vez) entrecruzadas, formando rombos, cintas trenzadas, meandros (adorno de líneas sinuosas y repetidas), dibujos en zigzag o lazos formando estrellas. Los patrones decorativos se obtienen repitiendo elementos simples entrelazados o superpuestos, consiguiendo así un efecto armonioso y dinámico, como en el ejemplo de "el hueso".

Utilizo lo que aprendí

1. Reúnanse en tríos; luego discutan y resuelvan los siguientes ejercicios.

Ahora vamos a modificar un triángulo equilátero para llegar a un diseño conocido como "la pajarita", y que se encuentra entre la gama de diseños nazaríes, junto "al hueso", "el pétalo" y "el avión", entre otros.

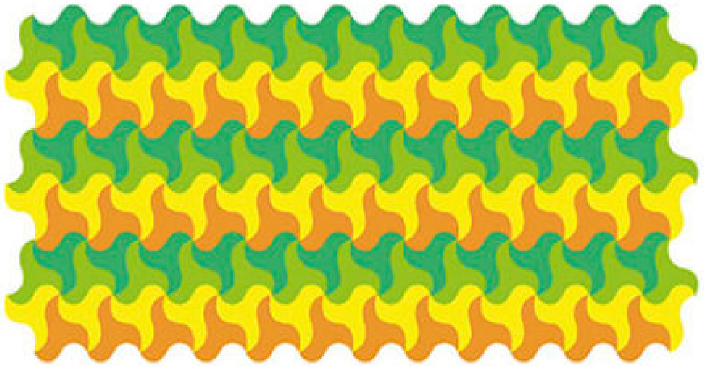


a) Analicen el procedimiento que se ilustra y escriban las instrucciones para que, a partir del triángulo equilátero, se obtenga la figura final.

____

____

Con el diseño de "la pajarita" se obtiene el siguiente teselado:



b) ¿Qué transformaciones se aplicaron a la figura original?

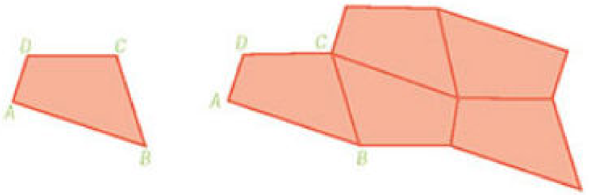
____

____

Aprende con tecnología

Para conocer más acerca de los diseños nazaríes, como su historia, clasificaciones y características, e interactuar con esta técnica a partir de ejercicios guiados, visita la página electrónica: http://goo.gl/Y93in (consultado el 2 de diciembre de 2016).

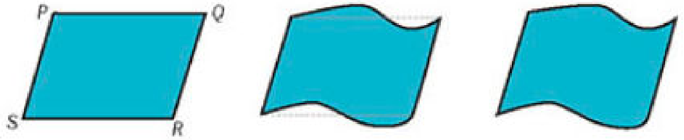
c) Discutan si con el polígono (cuadrilátero) *ABCD* es posible o no tapizar una hoja tamaño carta.



i) ¿Todos los cuadriláteros pueden acomodarse en teselaciones? ________ ¿Por qué? ________________________

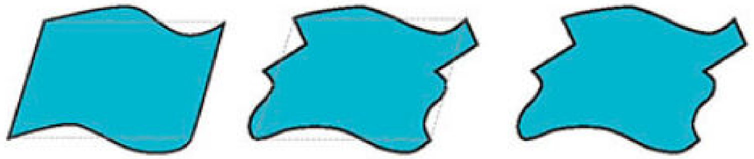
____

d) Si se modifica el paralelogramo *PQRS* como se indica en la figura, ¿es posible tapizar una hoja tamaño oficio con la forma resultante? Inténtenlo y discútanlo.



e) Al continuar la modificación de dicho paralelogramo y se obtiene lo que muestra la figura, ¿es posible tapizar la hoja tamaño oficio con esta nueva forma? ________ ¿Por qué? ________________________

____



f) ¿Cuál es el procedimiento que se debe seguir para que, a partir de una figura, puedan construirse formas caprichosas para tapizar la hoja tamaño oficio? ________ ¿Cualquier trazo sirve? ________________________

____

g) En media cartulina de color construyan una teselación diseñando un mosaico original y creativo. Para esto utilicen:

i) Al menos dos tipos de isometrías por elegir: traslación, rotación y simetría axial o reflexión.

ii) En la parte anterior de la hoja, la teselación deberá cubrir un cuadrado de 20 cm de lado ubicado en la parte izquierda de esta, y en la superficie sobrante deberás especificar claramente las **transformaciones isométricas** (traslación, rotación o reflexión) que se aplicaron a la figura inicial y que permitió construir la teselación.

iii) Decórenlo y preséntenlo al resto del grupo.

3 Medida

Teorema de Pitágoras

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

1 Comienza a pensar

1. En grupo, comenten la siguiente información y después respondan los cuestionamientos.

Se sabe que los egipcios conocían una forma para trazar ángulos rectos con una soga que tenía nudos equidistantes, es decir, que igual distancia entre ellos. En el siguiente ejemplo, puede verse que al amarrar los extremos anudados de una cuerda, solamente resultan 12 nudos:

La forma de trazar ángulos rectos consistía en usar la cuerda amarrada, acomodándola de tal manera que se formara un triángulo rectángulo.

a) Elijan a un voluntario para que frente al grupo elabore una cuerda similar, entonces los demás analicen los triángulos que pueden formarse con ella. También determinen cuáles de esos triángulos son triángulos rectángulos. Anota tus conclusiones:

____

____

b) Ahora, experimenta con una cuerda. ¿Cuántos nudos equidistantes debes hacerle para que al amarrar sus extremos resulten 30? ______ Analiza los triángulos que pueden formarse con dicha cuerda y cuáles son los triángulos rectángulos. Anota tus conclusiones:

____

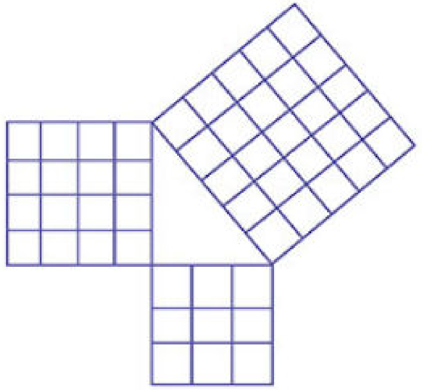
____

i) Representa gráficamente algunos de los triángulos equiláteros que lograste formar en el ejercicio del inciso *b)*:

2 Analicemos juntos

1. Practica los siguientes casos y responde las preguntas correspondientes.

a) Analiza la siguiente figura:



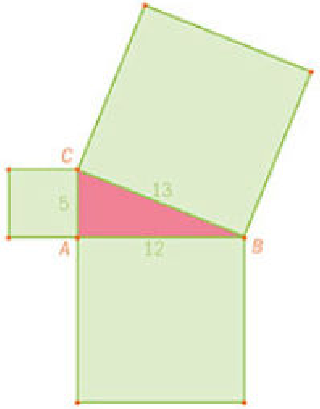
i) ¿Qué relación tiene con los triángulos que pueden formarse con la cuerda de 12 nudos? Anota tus conclusiones:

____

____

b) Traza en media cartulina un triángulo como el de la derecha:

i) Construye los cuadrados que pueden formarse sobre los lados del triángulo:



c) Cuadricula cada cuadrado con cuadrados pequeños de 1 cm. ¿Qué relación hay entre la cantidad de cuadrados pequeños construidos en los lados del triángulo? Anota tus conclusiones al reverso de tu cartulina.

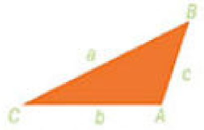
d) ¿Esto se puede hacer en cualquier triangulo rectángulo? ______ ¿Por qué?

____

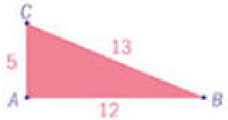
____

Glosario

Se dice que un triángulo es obtusángulo si uno de sus ángulos es obtuso (es decir, tiene una medida mayor que 90°) y los otros dos son agudos (con medidas menores que 90°) o se dice que es acutángulo si sus tres ángulos son agudos, (contienen medidas menores que 90°).



Triángulo obtusángulo

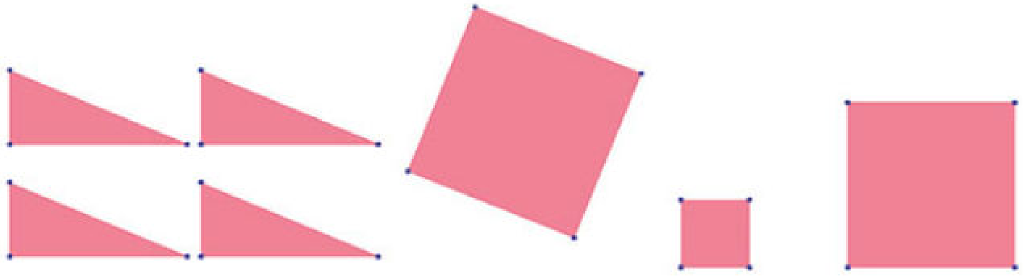


¿Adónde llegamos?

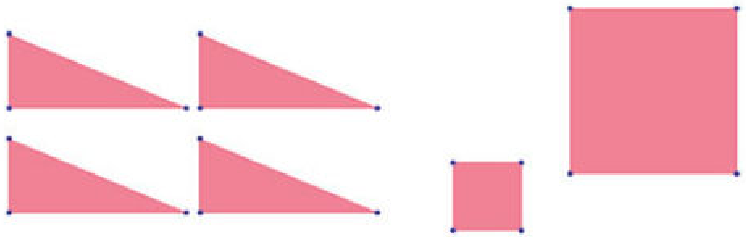
1. En equipos, hagan la siguiente práctica. Al terminar registren sus conclusiones.

En la sección anterior se mostró una relación entre los cuadrados construidos a partir de los catetos de un triángulo rectángulo y el cuadrado construido a partir de la hipotenusa.

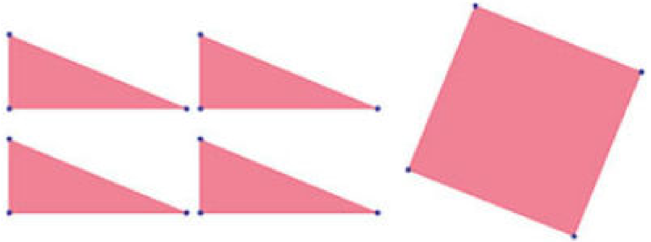
a) Elaboren un rompecabezas con cuatro triángulos rectángulos y tres cuadrados, cada uno con lado de la misma longitud que un lado del triángulo.



Usando los dos cuadrados menores y los dos mayores, forma un cuadrado.



Ahora usa el cuadrado mayor y los cuatro triángulos para formar otro cuadrado.



b) Analicen la relación entre los dos cuadrados construidos. ¿Cuál es la relación que existe entre las áreas de los dos cuadrados menores y la del cuadrado mayor? Coméntenlo y registren su conclusión.

____

____

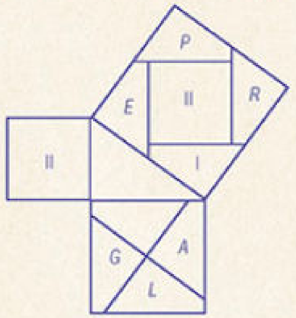
c) Coordinados por el profesor, comparen sus conclusiones con las de otros equipos.

2. Lee la siguiente información y coméntenla en sesión grupal.

¿Se imaginan un rompecabezas grabado en piedra, específicamente en una tumba? Pues existe, en el sepulcro de Henry Perigal. Pero... ¿quién es él?

El británico Henry Perigal (1801-1898) dedicó muchos años de su vida a la demostración de teoremas geométricos utilizando la técnica de disección. A continuación una de sus demostraciones sobre el "teorema de los tres cuadrados", publicadas en *The Messenger of Mathematics* (1874).

Primera demostración "por traslación de las partes componentes"



Por el centro del cuadrado de la base [cateto mayor] se dibujan dos rectas: una de ellas paralela a la hipotenusa, y la otra perpendicular a la hipotenusa. Por los puntos medios de los cuatro lados del cuadrado de la hipotenusa se trazan cuatro líneas paralelas a los lados [catetos] del triángulo, tal como se muestra en la figura.

¿Qué tiene la tumba?

Como una de las líneas que corta al cuadrado de la base por su centro es paralela a la hipotenusa y está comprendida entre dos paralelas [los lados del cuadrado] y como la otra línea, que corta a la anterior perpendicularmente, también está comprendida entre dos paralelas [los lados del cuadrado], entonces cada uno de los cuatro segmentos es la mitad del lado del cuadrado de la hipotenusa, que queda dividido en cuatro cuartos simétricos [que encierran un cuadrilátero].

Los lados del cuadrilátero *I* son paralelos a los lados correspondientes del cuadrilátero *i*; además, dos de los lados de cada uno de dichos cuadriláteros son la mitad de la hipotenusa. Por lo tanto, los dos cuadriláteros (*I* e *i*) tienen el mismo perímetro y la misma área.

De forma similar se puede probar que *P* y *L*, *E* y *A*, *R* y *G* son iguales y semejantes. Además, todos tienen el mismo perímetro y área.

El lado mayor de *E* es igual y paralelo al lado mayor de *A*, que es paralelo e igual a la perpendicular [cateto menor] más el lado menor de *I*. Quitando el lado menor de *I* del lado mayor de *E* queda el lado del cuadrilátero *H*. Dicho cuadrilátero, al ser rectangular y tener los cuatro lados iguales, es un cuadrado igual al cuadrado de la perpendicular [cateto menor] del triángulo rectángulo.

Por consiguiente, los cinco componentes del cuadrado de la hipotenusa son iguales y semejantes a las partes que forman el cuadrado de la base y al cuadrado de la perpendicular [cateto menor]. Lo que demuestra que el cuadrado sobre la hipotenusa es equivalente a las áreas de los cuadrados sobre los catetos.

Conexión matemática

En http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3402&directory=67 (consultado el 2 de diciembre de 2016) se explica una segunda demostración de Henry Perigal, la de los dos cuadrados que se convierten en uno, con la cual incluso puedes practicar. Descubre de qué se trata siguiendo su paso a paso. Conéctate e inténtalo.

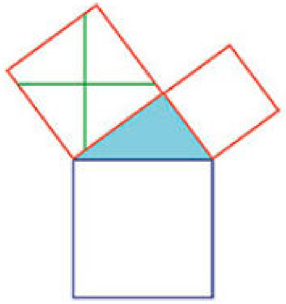
Conexión matemática

El teorema de Pitágoras tiene varias aplicaciones en la vida cotidiana.

3. Agrupados en tríos, hagan la siguiente dinámica.

   a) Tracen un triángulo rectángulo. Obsérvenlo, y de acuerdo con la longitud del lado mayor del ángulo recto, localicen el centro del cuadrado. Representen gráficamente cómo puede localizarse este punto:

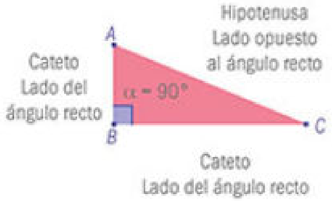
   b) Respecto a la figura que trazaron, dividan el cuadrado mayor en cuatro partes, trazando dos perpendiculares como se muestra en la figura. La intersección de las perpendiculares es el **centro del cuadrado**.



   c) Ahora, analicen cómo llenar el cuadrado, ubicado arriba del lado mayor del triángulo rectángulo, con las partes del cuadrado dividido y el cuadrado del lado menor. Registren sus conclusiones:

   d) Compara el resultado con los que obtuvieron los otros tríos colaborativos. ¿Qué indica el poder llenar el cuadrado del lado mayor con las piezas indicadas? Anota tus conclusiones:

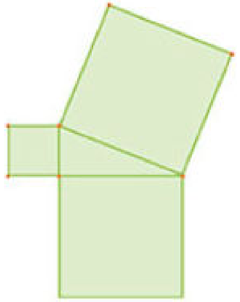
4 Algo por aprender



En tu curso anterior de matemáticas estudiaste que todo triángulo rectángulo tiene un lado mayor denominado **hipotenusa** (el lado opuesto al ángulo recto), y un par de lados más denominados **catetos** (los lados que forman el ángulo recto).

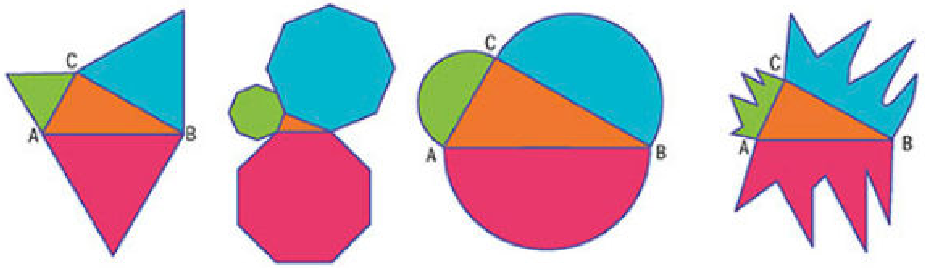
Si C es la longitud de la hipotenusa y A y B son las longitudes de los catetos. La relación entre estas partes se resume en la expresión $a^2 + b^2 = c^2$.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. Esta relación recibe el nombre de **teorema de Pitágoras**, del cual ya obtuviste información en el bloque anterior de este libro. Su representación geométrica es:



En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

La relación entre áreas no se reserva solamente para cuadrados construidos en los lados de un triángulo rectángulo, también es válida si se trazan figuras semejantes en cada lado:



Aprende con tecnología

En las siguientes páginas electrónicas podrás explorar la relación que se establece en el teorema de Pitágoras.
http://goo.gl/9imCw
http://goo.gl/7DVwL
http://goo.gl/1kfw2 (consultados el 2 de diciembre de 2016).

Conexión matemática

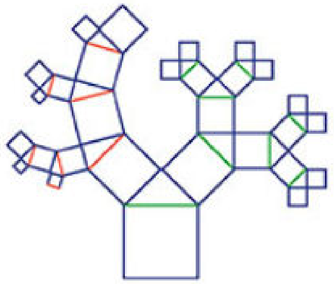
¿Puedes imaginar que existe el inverso del teorema de Pitágoras? Este expresa que si las longitudes de los tres lados de un triángulo satisfacen la ecuación de Pitágoras, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

En http://goo.gl/rlV6a (consultado el 2 de diciembre de 2016) puedes descargar un documento PDF con dinámicas para que experimentes con este tema.

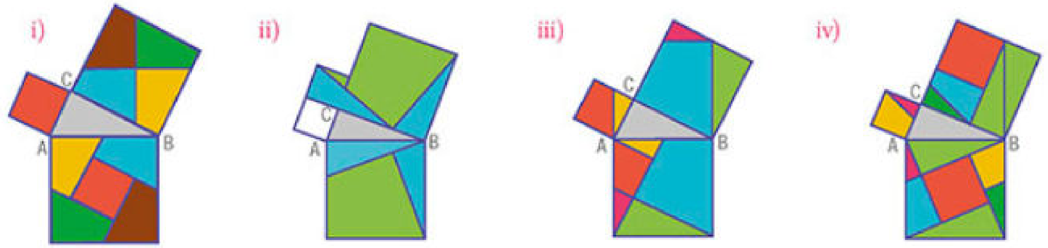
5 Utilizo lo que aprendí

1. Copia los siguientes ejercicios en hojas aparte y resuélvelos. Puedes solicitar a tu profesor que debatan en grupo las soluciones, así tendrán retroalimentación.

   a) Busca en internet la figura llamada "Árbol de Pitágoras" y trázala en una cartulina para mostrarla al grupo.



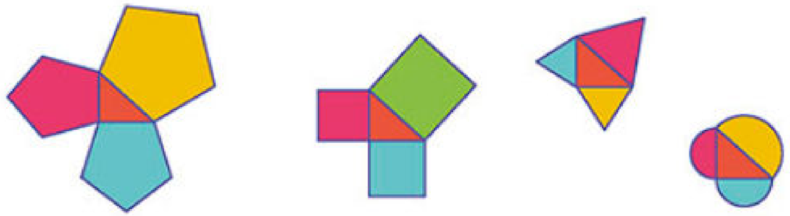
b) Utiliza los siguientes diagramas para construir rompecabezas con los cuales se puede corroborar el teorema de Pitágoras.



Aprende de los errores

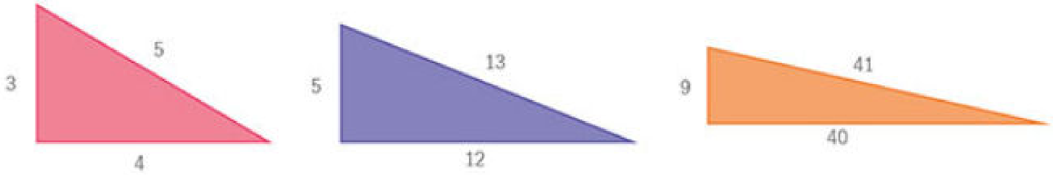
Si un amigo te dice que el teorema de Pitágoras vale para cualquier triángulo, ¿qué explicación le darías para hacerle ver que su afirmación es incorrecta?

c) Comprueba en los siguientes casos que el área de la figura construida en la hipotenusa será igual a la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas en los catetos. Antes, asigna medidas (en cm) a los triángulos.



d) Los egipcios utilizaban el triángulo con lados de 3, 4 y 5 nudos para trazar triángulos rectángulos. ¿Por qué puede asegurarse que ese triángulo es un triángulo rectángulo?

e) Determina si los siguientes triángulos son triángulos rectángulos.



f) Si tienes un triángulo de lados A, B y C, siendo C el mayor, y no se cumple el teorema de Pitágoras:
  i) Si $a^2 + b^2 > c^2$, ¿el triángulo será obtusángulo o acutángulo? ¿Por qué?
  ii) Si $a^2 + b^2 < c^2$, ¿el triángulo será obtusángulo o acutángulo? ¿Por qué?

Utilidad del teorema de Pitágoras

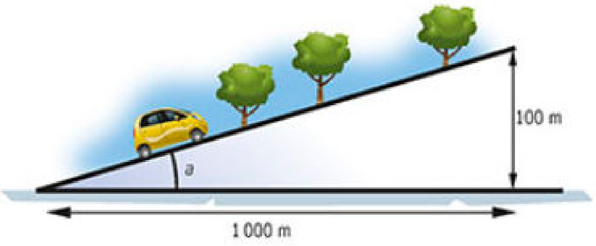
Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

1 Comienza a pensar

1. En equipos, discutan los siguientes planteamientos y respondan las preguntas correspondientes.

  a) El topógrafo Gustavo tomó las siguientes medidas para calcular el ancho de una carretera.
    i) ¿Cómo la calculó? ______________________________

  b) ¿Qué relación tiene esta situación con la de medir la distancia en una pendiente de carretera? ______________________________

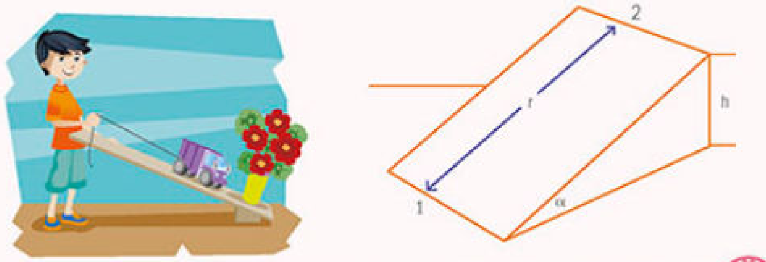


    i) ¿Cómo encontraste la relación? ______________________________

  c) ¿Cuáles conceptos utilizaste? ______________________________

Conexión matemática

En la física se utiliza el teorema de Pitágoras para estudiar las relaciones en un plano inclinado:



1. Reúnanse en parejas, discutan la siguiente información y después resuelvan.

a) El arquitecto Serrano desea saber dónde debe iniciar una escalera en un pequeño edificio de oficinas en construcción, aunque ya ha decidido que la levantará en una longitud de 8 m y alcanzará una altura de 4 m.

i) ¿Cómo tiene que calcular la distancia que debe haber entre la pared y el pie de la escalera?

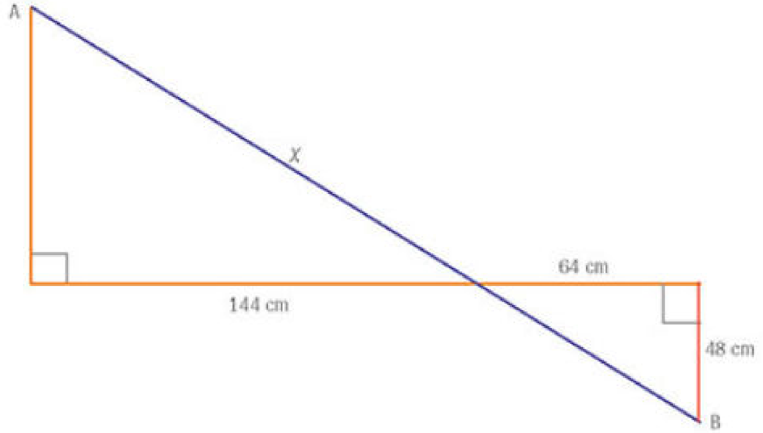
____
____
____

ii) ¿Qué tipo de cálculos tendrá que hacer? Expónganlos y luego anoten el procedimiento que siguieron:

____
____
____

iii) Comparen sus resultados con los de otra pareja.

b) ¿Qué longitud tendría una escalera si se prolonga de la parte superior de un piso a un sótano de acuerdo con las siguientes medidas?



i) Expongan cómo calcularla y escriban qué procedimientos son necesarios.

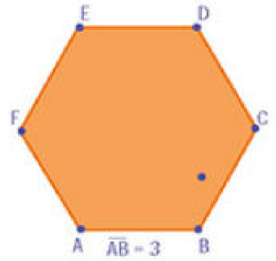
____
____
____

¿Adónde llegamos?

Como habrás podido comprobar hasta aquí, el teorema de Pitágoras tiene muchas aplicaciones que pueden ayudarnos a conocer mejor las figuras geométricas.

1. En grupo y coordinados por el profesor, aborden la siguiente actividad:

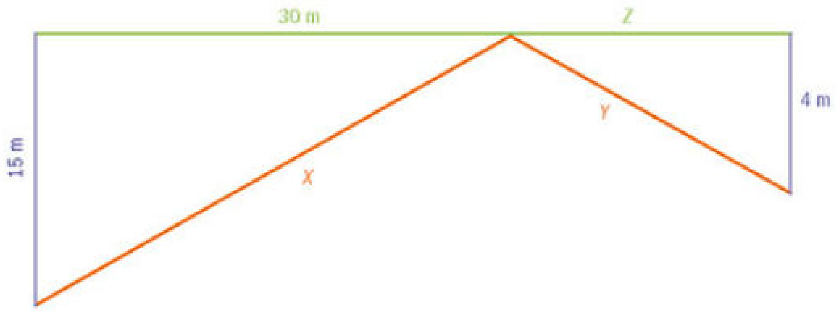
a) ¿Cuánto mide la apotema de un hexágono regular si la longitud de su lado es de 6 cm?



i) Expliquen y representen el o los métodos que hay que utilizar para hacer el cálculo.

____
____
____

b) Se debe colocar una protección en el techo de una casa de campo que tiene techo de dos aguas, se han tomado las siguientes medidas, de acuerdo con las dimensiones de la casa.

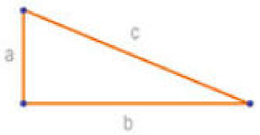


i) ¿Será posible determinar los valores de *a*, *b* y *c*? _______ ¿Cómo? Explica y representa el procedimiento que debe emplearse.

____
____
____

4 Algo por aprender

En la lección anterior se habló del teorema de Pitágoras. Escribiéndolo con otras palabras: "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos".



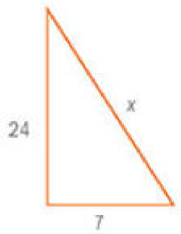
De manera que si c es la longitud de la hipotenusa y a y b son las longitudes de los catetos, la relación que establece el teorema de Pitágoras es $a^2 + b^2 = c^2$.

¿Puede emplearse esta relación para calcular la longitud del lado faltante si se conocen las longitudes de los otros dos lados? Si es así, debatan en grupo cómo hacerlo y anota tus conclusiones: ______________________________

____

1. Analiza y responde los siguientes planteamientos.

a) Considera el siguiente triángulo rectángulo:



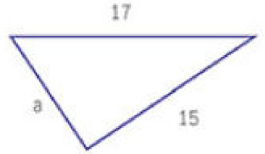
i) Representa y redacta el procedimiento:

____

____

____

b) Considera el siguiente triángulo rectángulo y explica cómo calcular a.



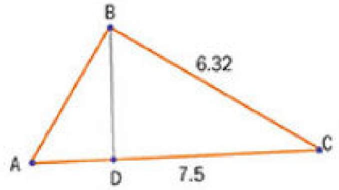
i) Representa y redacta el procedimiento:

____

____

____

c) Calcula una de las alturas del siguiente triángulo rectángulo.



i) Explica y representa tu procedimiento:

____

____

____

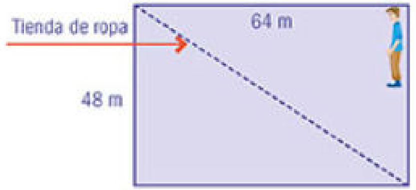
ii) ¿Qué longitudes tienen las otras alturas? ______________________________
Anota tus operaciones:

5 Utilizo lo que aprendí

1. Reúnanse en tríos y lleven a cabo las actividades de esta sección. Luego soliciten a su profesor que organice una sesión grupal para debatir las soluciones.

a) Carlos, el albañil, apoyó una escalera de 7 m de largo contra un muro vertical para llegar a la parte alta de la obra. El pie de la escalera quedó a 3 m del muro. Calcula la altura que alcanza la parte superior. Representen y resuelvan:

b) En la esquina de una plaza rectangular, con dimensiones de 48 m y 64 m respectivamente, hay un puesto de ropa. Si te ubicas en la esquina opuesta diagonalmente, ¿cuántos metros caminarías en diagonal para llegar al puesto?

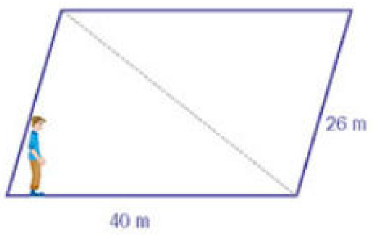


Aprende de los errores

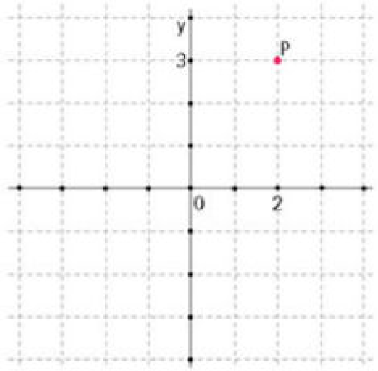
¿Qué le responderías a un compañero que te afirma que para calcular x en una relación establecida con el teorema de Pitágoras como: $x^2 + 7^2 = 12^2$ dijera que la solución es $x = 12 - 7$?

c) ¿Cuál es la máxima distancia que puedes recorrer, sin cambiar de dirección, en una pista de patinaje en forma de rombo, si cada lado del rombo mide 26 m y la diagonal menor mide 40 m?

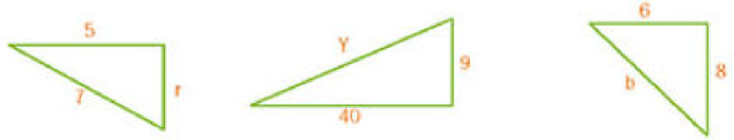
Represéntenlo y describan su procedimiento.



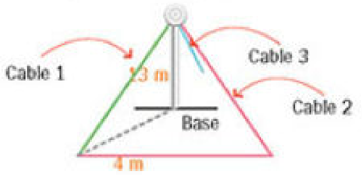
d) El pueblo de San Juan se ubica en línea recta, 40 km al norte del pueblo de La Nopalera. San Juan también está a 70 km al este del pueblo de San Jacinto. ¿Qué distancia hay entre La Nopalera y San Jacinto?



e) Encuentren el valor de la longitud del lado faltante, si consideras que todos los triángulos siguientes son rectángulos.

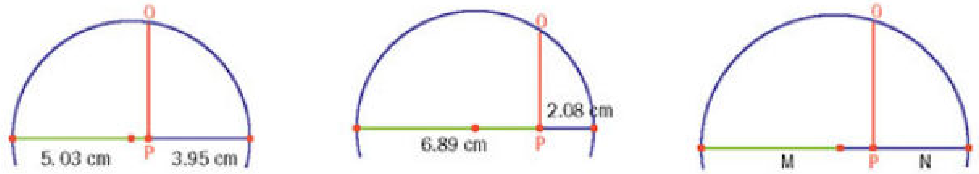


f) Para sujetar una antena de 13 m de alto se proyecta colocar tres cables de acero. Si se desea que el punto de enganche del cable esté a una distancia de 4 m de la base de la antena. ¿Cuántos metros de cable se necesitarán? Represéntenlo y descríbanlo:



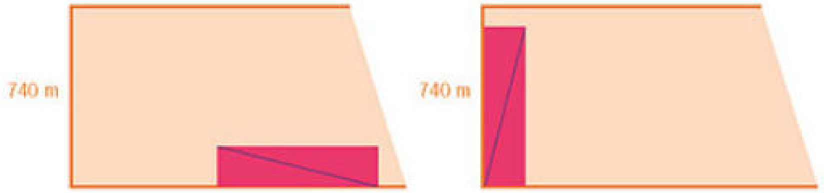
2. Lee las siguientes condiciones y traza las figuras que sean necesarias. Es importante que representes gráficamente todas las situaciones para que logres una mejor apreciación de éstas.

a) Calcula la medida del lado de un cuadrado sabiendo que su diagonal mide 10 cm.
b) Calcular la medida de la diagonal de un rectángulo con lados de 3 y 4 cm respectivamente.
c) Calcular la altura de un triángulo equilátero de 5 cm de lado.
d) En las siguientes figuras calcula la longitud de OP.

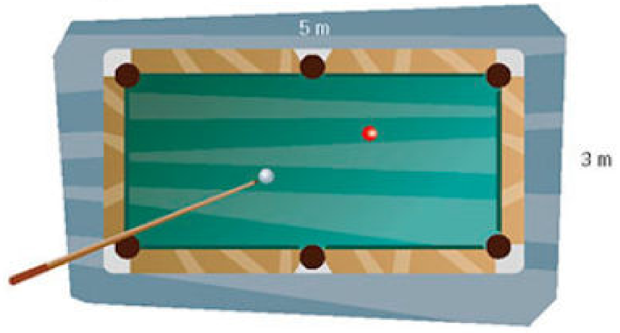


A la longitud OP se le denomina **media geométrica** en los segmentos de longitud M y N.

e) Con la media geométrica, encuentra un segmento que mida la raíz cuadrada de 13 y después construye un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo con dimensiones de 12 cm y 17 cm. ¿Qué longitud tendrán las diagonales del rectángulo y el cuadrado?
f) Los hermanos Carlos y Raúl quieren comprar un armario antiguo que no puede desmontarse, pues tiene un ancho de 60 cm y un alto de 2.35 m, pero se preguntan si podrán colocarlo en una habitación que tiene una altura de 2.4 m. ¿Qué cálculos efectúan?



g) Se lanza una bola de billar desde la esquina de una mesa que mide 3 m por 5 m. Si se golpea a la bola para que alcance la esquina en diagonal, ¿qué distancia tendrá que recorrer?



4 Nociones de probabilidad

Combinación de transformaciones geométricas

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

En probabilidad, también son relevantes el **experimento aleatorio** y el **ensayo**. El primero es un proceso que se efectúa de acuerdo con un conjunto bien definido de reglas; es de naturaleza tal que se repite o puede concebirse la repetición del mismo. El resultado de cada ejecución depende de "la casualidad" y por lo tanto, no se puede predecir un resultado único. A una sola ejecución del experimento se le llama ensayo. Tomado de http://goo.gl/TeGUJ (consultado el 2 de diciembre de 2016).

1 Comienza a pensar

1. Analiza y reflexiona la siguiente información. Después responde.

Observa la imagen de una ruleta instalada en una sala de juegos para niños. El número que sale equivale a la cantidad de boletos que puede ganar un niño para canjearlos por dulces.

a) Considerando que cualquiera de todos los números de la ruleta tienen la misma posibilidad de ocurrir, ¿cuántas opciones hay en total? ________

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar el premio de 500 boletos? ________ ¿Por qué? ________

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un premio distinto de 500 boletos? ________ ¿Por qué? ________

d) Entre las probabilidades obtenidas en la pregunta del inciso *b*) y *c*), ¿se completa el total de las opciones de sucesos que pueden ocurrir en la ruleta? ________ ¿Por qué? ________

e) ¿Cuál es la probabilidad de que salga el premio de menor cantidad de boletos? ________ Argumenta tu respuesta: ________

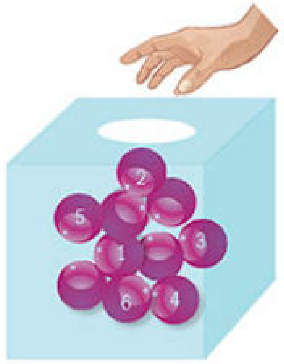
f) ¿Cuál es la probabilidad de que salga el premio de 30 boletos? ________ ¿Cómo llegaste a esa conclusión? ________

g) ¿Cuál es la probabilidad de que en la ruleta salgan 25 o 30 boletos? ________ ¿Cómo lo determinaste? ________

2 Analicemos juntos

1. En conjunto con tres de tus compañeros debatan la siguiente situación y lleguen a un consenso para responder lo que se plantea.

Saúl acudió a un programa de concursos de la televisión local. Durante su participación sacó una de las diez esferas que estaban en una urna; en el interior de cada esfera había un papel marcado con un número del 1 al 10, y que indicaba el tipo de premio que recibiría. Los organizadores le avisaron que los números pares estaban relacionados con los premios importantes, y que los múltiplos de 3 tenían asignado un premio costoso.



a) Al sacar una esfera, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par? ________

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un múltiplo de 3 al sacar una esfera? ________

c) Entonces, ¿cuál será la probabilidad de obtener un número par o un múltiplo de 3? ________ Argumenten su respuesta: ________

d) ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar una esfera, se obtenga un número menor que 5? ________

e) ¿Y cuál es la de que se obtenga un número mayor que 5? ________

f) Entonces, ¿cuál será la probabilidad de obtener un número menor que 5 o un número mayor que 5? ________ ¿Por qué? ________

Repasemos. Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se le llama **espacio muestra** del experimento; se denota con *S*. Cada uno de los resultados del experimento se llama **elemento o punto de *S***. Se dice que un espacio muestra es finito o infinito, cuando el conjunto *S* tiene un número finito o infinito de elementos, respectivamente. En muchos problemas prácticos interesa el hecho de que cierto resultado esté contenido en un conjunto de resultados. Es claro que cada conjunto de este tipo es un subconjunto del espacio muestra *S*; este subconjunto se llama **evento** o **suceso**. Tomado de http://goo.gl/TeGUJ (consultado el 2 de diciembre de 2016).

3 ¿Adónde llegamos?

1. Tras analizar las preguntas de la sección anterior, en plenaria guiada por el profesor discutan los siguientes cuestionamientos y anoten sus conclusiones.

a) Entre las opciones que revisaste para determinar la probabilidad de obtener un número par y las que hay para un número que sea múltiplo de 3, ¿existe uno o varios elementos que cumplan con ambas condiciones? ________ ¿Cuál o cuáles son? ________

b) ¿Este o estos elementos son importantes para determinar la probabilidad del evento "obtener un número par o un múltiplo de 3"? ________ Explica por qué: ________

Aprende con tecnología

Para reforzar tu conocimiento acerca del tema de los eventos complementarios en probabilidad mediante otras versiones de los conceptos y visualizar ejemplos, explora la página web: http://goo.gl/zF3Ny

Y para el mismo fin, ahora sobre el tema de los eventos mutuamente excluyentes, visita: http://goo.gl/v6DPm

En esta página web encontrarás dinámicas acerca del primer tema y algunos otros que te serán de mucha utilidad.

c) Entre las opciones que revisaste para determinar probabilidad de obtener un número menor que 5 y las que hay para un número que sea mayor que 5, ¿existe uno o varios elementos que cumplan con ambas condiciones? ¿Cuál o cuáles? ______________________________

____

d) ¿Esto afecta la probabilidad del evento "obtener un número menor que 5 o un número mayor que 5"? ______________________________

e) ¿Qué diferencias y/o similitudes encuentras al determinar las probabilidades de los eventos: "obtener un número par o un múltiplo de 3" y "obtener un número menor que 5 o un número mayor que 5"?

Diferencias	Similitudes
______________	______________
______________	______________
______________	______________

4 Algo por aprender

Eventos complementarios

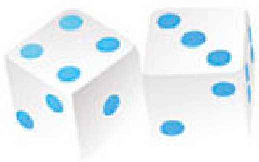
Dos **eventos** se denominan **complementarios** cuando la unión de las posibilidades de uno con las del otro reúne todos los elementos del espacio muestral y además no tienen elementos en común, es decir, su intersección es vacía.

Dicho de otra manera, el complemento de un evento A son todos los elementos del espacio muestral (K) que no se encuentran en A. La suma de las probabilidades de A con las del evento complementario Ac es:

$$P(A) + P(Ac) = 1$$

Y la probabilidad de un evento complementario es:

$$Ac = 1 - P(A)$$



Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado de seis caras, el espacio muestral tiene seis elementos:

1, 2, 3, 4, 5 y 6

La probabilidad A "sacar un 3" es:

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

La probabilidad del evento complementario Ac "sacar un numero distinto de 3" es:

$$P(Ac) = \frac{5}{6}$$

De donde

$$P(A) + P(Ac) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos, A y B, que no pueden ocurrir de forma simultánea, se denominan **mutuamente excluyentes**. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado de seis caras, podemos tener los siguientes eventos:

- Evento A: "sacar un número menor que 3"
- Evento B: "sacar un número mayor que 3"

Como puedes ver los eventos A y B son mutuamente excluyentes, ya que no puede suceder que un resultado al tirar un dado sea, al mismo tiempo, menor y mayor que 3.

- La probabilidad de A: $P(A) = \frac{2}{6}$
- La probabilidad de B: $P(B) = \frac{2}{6}$

Ahora bien, la probabilidad del evento de "sacar un número menor que 3 o sacar un número mayor que 3" se representa como:

$$P(A \text{ o } B)$$

Como son eventos mutuamente excluyentes, para calcular la probabilidad de A o B tenemos:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Lo cual sería:

$$P(A \text{ o } B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

En las situaciones anteriores, específicamente en el caso del concurso de televisión con los premios del 1 al 10, la probabilidad de "obtener un número par o un múltiplo de 3" representa dos eventos que no son mutuamente excluyentes ya que:

1. El evento A "obtener un número par" son los números: 2, 4, 6, 8 y 10.
   De donde $P(A) = \frac{5}{10}$
2. El evento B "obtener un múltiplo de 3" son los números: 3, 6 y 9.
   De donde $P(B) = \frac{3}{10}$

Pero como puedes observar, el número 6 es común en A y B, razón por la que puede afirmarse que A y B no son mutuamente excluyentes: puede ocurrir simultáneamente que un número sea par y a la vez sea múltiplo de 3.

En estos casos, para determinar la probabilidad de A o B, hay que restar las repeticiones para no contarlas dos veces. Esto es:

$$P(\text{par o múltiplo de 3}) = P(\text{par}) + P(\text{múltiplo de 3}) - P(\text{par y múltiplo de 3})$$

Para simplificarlo, un evento puede expresarse con una sola letra en vez de usar frases.
En este caso la probabilidad $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$.

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B) = 0.5 + 0.3 - 0.1 = 0.7$$

Utilizo lo que aprendí

1. Reúnanse en parejas y resuelvan los ejercicios expuestos a continuación. Recuerden que si tienen dudas, consulten a su profesor.

a) Con base en la situación de la ruleta con la que se inició la lección:

i) Describan dos eventos que sean complementarios y represéntenlos:

ii) Ahora dos eventos que sean mutuamente excluyentes. También represéntenlos:

b) En una urna hay 3 canicas rojas, 2 azules y 6 verdes. En otra hay canicas numeradas del 0 al 4. Anota en cada caso la fórmula de probabilidad y si el evento es del tipo mutuamente excluyente o no y por qué.

Urna 1

Urna 2

Fórmula de probabilidad

Fórmula de probabilidad

i) ¿Cuál es la probabilidad de sacar...
un número non y una canica azul? ______
un número par y una canica roja o verde? ______
un 3 y una canica verde? ______
un 4 o un 0? ______
una canica roja o una azul? ______

c) De una urna se extraen tarjetas con los siguientes números y en el orden que se indica:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

i) Determina la probabilidad de extraer un número menor que 5 o mayor que 12. Describe tu procedimiento: ______

ii) Calcula la probabilidad de obtener un número par o un múltiplo de 5.

iii) De los incisos anteriores, ¿hay alguno que represente eventos mutuamente excluyentes? ______ ¿Por qué? ______

Prueba tipo PISA

I El recorrido de Lorena

Todos los días, Lorena recorre de su casa a la escuela una distancia de 7 kilómetros (km). Los miércoles y viernes le gusta ir a comprar a la pastelería una gelatina de zanahoria antes de llegar a la escuela. Esos días, debido al antojo de la gelatina, ella termina recorriendo 6 km más de los que recorre lunes, martes y jueves.

1. Hoy miércoles, Lorena sale de su casa y camina hacia el norte 4 km y luego hacia el este 3 km, cuando llega a la pastelería. ¿Cuál es la menor distancia desde donde está Lorena hasta el punto de partida?
   a) 3 km b) 5 km c) 7 km d) 10 km

2. Inicio de semana. Lorena sale de su casa y camina hacia el norte 4 km y luego hacia el oeste 3 km y llega a la escuela. ¿Cómo es la distancia recorrida por Lorena desde su casa hasta la escuela?
   a) Ancho = 2 cm y largo= 3 cm
   b) Ancho = 3 cm y largo= 3 cm
   c) Ancho = 4 cm y largo= 3 cm
   d) Ancho = 5 cm y largo= 2 cm

3. ¿Qué figura geométrica describen los trayectos hechos por Lorena? ____________

II La pastelería

En la pastelería que Lorena visita los miércoles y viernes se venden gelatinas con formas y tamaños diferentes: individuales de vaso, para compartir con forma de hexágono regular y cuadradas.

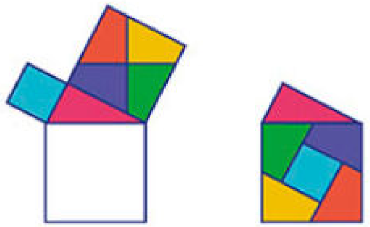
4. Si Lorena divide en triángulos equiláteros la gelatina con forma de hexágono, la apotema del hexágono coincidirá con la altura de cada uno de los triángulos. ¿Qué figura geométrica te ayudará a determinar la altura? Ilustra la situación en tu cuaderno.

5. ¿Cuál es la expresión matemática, con valores, para determinar la medida de la altura de cada uno de los triángulos, si los lados de la gelatina miden 10 cm? ____________

6. Si la gelatina de tamaño familiar con forma cuadrada la dividimos diagonalmente en dos partes iguales, ¿cuánto mide el corte si la gelatina tiene un área de 400 cm^2? ____________

III Teorema de Pitágoras

La imagen nos presenta dos maneras de mostrar que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

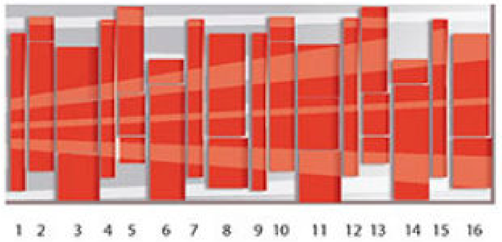


7. ¿Cómo se llama la propiedad antes descrita? ¿Qué podemos obtener con ésta?
   a) **Criterios de congruencia de triángulos.** De acuerdo al conocimiento teórico y práctico es utilizado como herramienta para calcular y demostrar la congruencia de otras figuras geométricas.
   b) **Homotecia.** De acuerdo al conocimiento teórico y práctico, es utilizado como herramienta para calcular la transformación geométrica.
   c) **Teorema de Tales.** De acuerdo al conocimiento teórico y práctico es utilizado como herramienta para calcular: razones simples, razones dobles, semejanza y el estudio de las escalas.
   d) **Teorema de Pitágoras.** De acuerdo al conocimiento teórico y práctico es utilizado como herramienta para calcular: ángulos, áreas, distancias o alturas entre otras cosas.

8. Carla midió con una regla los catetos del triángulo de la figura y obtuvo como resultado 6 cm y 8 cm, respectivamente. ¿Cuál es el área del cuadrado que está sobre la hipotenusa? ____________

IV Los azulejos

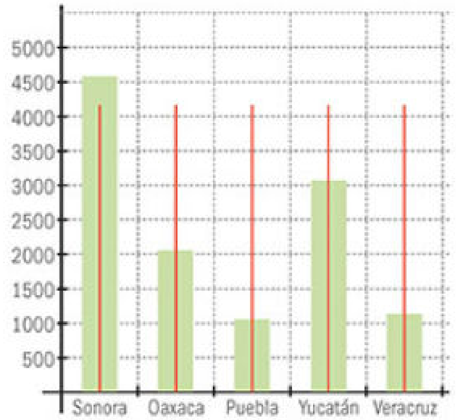
Martín utilizará azulejos para recubrir el baño de su casa. Según el tamaño de éstos y las medidas del baño, se formó una línea de huecos entre el lavabo y la puerta. Para terminar de recubrir la pared, Martín necesita contar 12 azulejos de acuerdo con su eje de simetría. ¿Cuales números de la imagen tendrá que elegir Martín para cortar los azulejos?



9. Un ejemplo de simetría: ____________

V Gráficas

10. La gráfica muestra la producción de huevo del año pasado en diferentes estados del país. ¿Qué porcentaje del total produjo Veracruz?
   a) 5%
   b) 10%
   c) 25%
   d) 30%



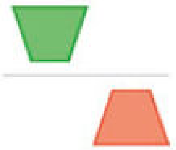
Ponte a prueba

I Lee con atención cada uno de los problemas que a continuación se presentan y elige la respuesta que consideres correcta.

1. **Factoriza la ecuación $x^2 - 2x + 1$, y encuentra el punto donde la parábola toca al eje x.**
   a) $x(x - 2 + 1)$; toca al eje x cuando $x = 0$
   b) $x(x - 2) + 1$; toca al eje x cuando $x = 2$
   c) $x(x - 1)2$; toca al eje x cuando $x = -1$
   d) $x(x - 1)2$; toca al eje x cuando $x = 1$

2. **Factoriza la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ y encuentra sus raíces.**
   a) Se factoriza como $(x + 4)(x - 2) = 0$ y la solución es $x = -4$ y $x = 2$
   b) Se factoriza como $(x + 4)(x - 2) = 0$ y la solución es $x = 4$ y $x = -2$
   c) Se factoriza como $x(x + 2) - 8 = 0$ y la solución es $x = 0$ y $x = -2$
   d) Se factoriza como $x(x + 2) - 8 = 0$ y la solución es $x = -8$ y $x = 2$

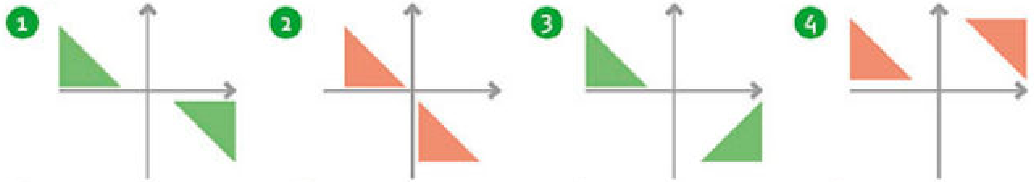
3. **¿Qué tipo de transformaciones se aplicaron al polígono verde para obtener el anaranjado?**



   a) Reflexión, traslación
   b) Traslación
   c) Rotación, traslación, reflexión
   d) Reflexión

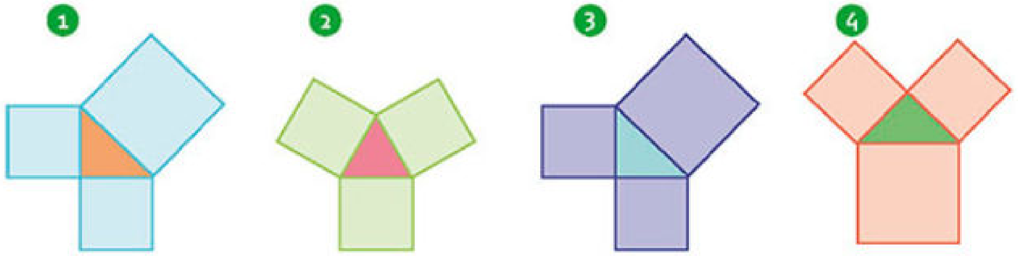
4. **Si a una figura se le aplican dos movimientos continuos de simetría axial donde los ejes de simetría son perpendiculares entre sí, entonces...**
   a) ...la imagen resultante cambia de posición y sus dimensiones son diferentes con respecto a la figura original.
   b) ...la imagen resultante se puede obtener con sólo una traslación de la imagen original.
   c) ...la imagen resultante tiene simetría central con respecto a la figura original, donde el centro de simetría es el punto de intersección de los ejes.
   d) ...la imagen resultante conserva la misma forma, la misma posición y las mismas longitudes en los lados correspondientes.

5. **En solo una de las siguientes imágenes se aplicó una traslación al triángulo rectángulo. ¿Qué imagen es?**



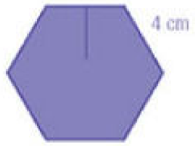
   a) Imagen 1 b) Imagen 2 c) Imagen 3 d) Imagen 4

6. **¿Para cuál de las figuras se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$?**

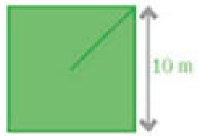


   a) Imagen 1 b) Imagen 2 c) Imagen 3 d) Imagen 4

7. **¿Cuál es la longitud de la apotema de un hexágono regular cuya longitud en cada lado es igual a 4 cm? Recuerda que un hexágono regular puede formarse con 6 triángulos equiláteros.**
   a) Aproximadamente 5.12 cm
   b) Aproximadamente 2 cm
   c) Aproximadamente 12 cm
   d) Aproximadamente 3.46 cm



8. **En un terreno cuadrado se instalará tubería con el fin de colocar una toma de agua en el centro de este. Si la tubería correrá a lo largo de una diagonal del cuadrado, como se muestra en la imagen, ¿cuántos metros lineales de tubería se necesitan?**
   a) Menos de 7 m
   b) 5 m
   c) Más de 10 m
   d) Aproximadamente 3.46 cm



9. **Dada una baraja de 40 cartas (cuatro palos y de cada palo 10 cartas enumeradas del 1 al 10), considera los sucesos:**
   A) "Elegir una carta con un número primo"
   B) "Elegir una carta con un número mayor que 7"

   ¿Cuál es la afirmación verdadera?

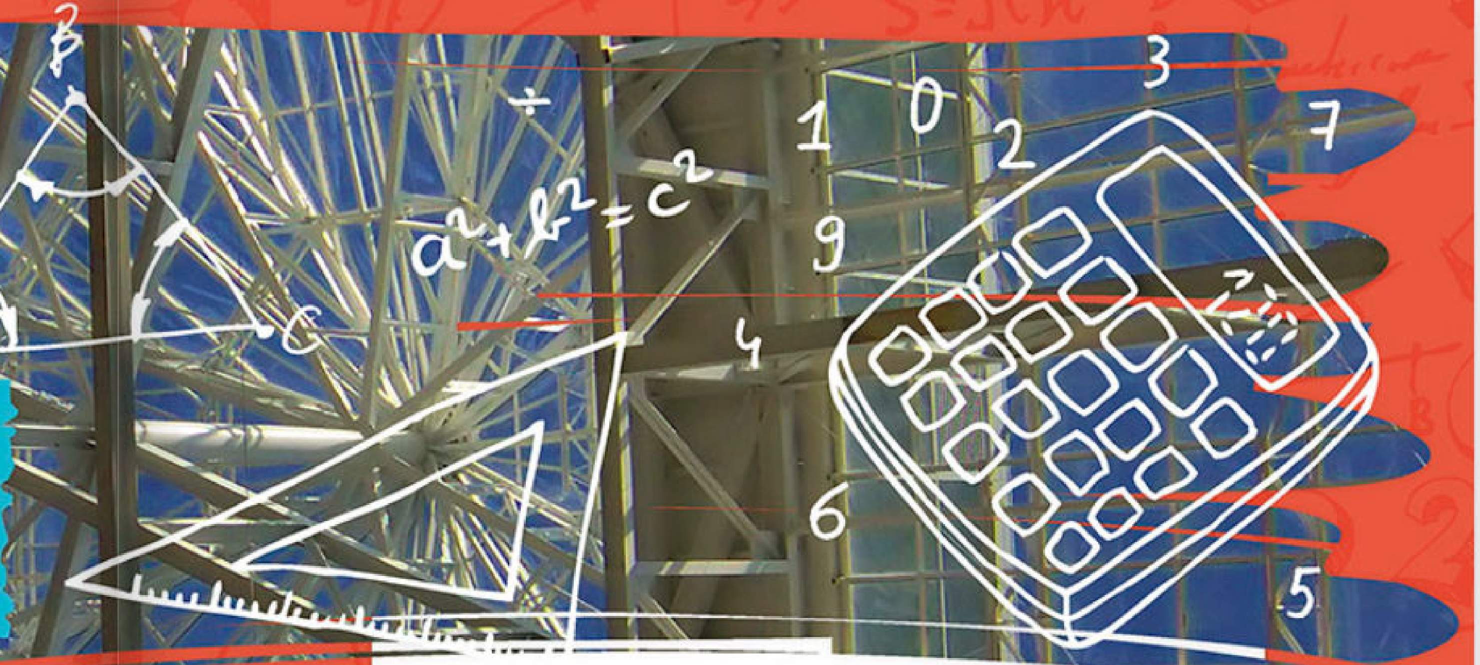
   a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{4}{10}$ d) $\frac{7}{40}$

10. **Considerando la misma baraja del punto anterior, ¿cómo se calcula la probabilidad de que ocurran los eventos A o B? Donde:**

   A = "Que salga una carta con un número par" B = "Que salga una carta con un número primo"
   $P(A)$ = probabilidad de ocurrencia del evento A $P(B)$ = probabilidad de ocurrencia del evento B
   $P(A \text{ y } B)$ = probabilidad de ocurrencia simultánea de los eventos A y B

   a) $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$
   b) $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) + P(\text{A y B})$
   c) $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$
   d) $P(A \text{ o } B) = P(A) - P(B)$

Bloque 3



Ejes temáticos	Temas	Secuencia de aprendizaje
Sentido numérico y pensamiento algebraico	1. Patrones y ecuaciones	• Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones
Forma, espacio y medida	2. Figuras y cuerpos	• Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas • Resolución de problemas geométricos mediante el Teorema de Tales • Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas
	3. Medida	• Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos • Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera
Manejo de la información	4. Nociones de probabilidad	• Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Activa tus competencias

Ana asistió a una fiesta y retó al mago Juan a que adivinara qué números, restados, dan dos unidades, y sumados sus cuadrados, dan por resultado 580.

- ¿Se necesita ser mago para conocer los dos números que cumplen las características planteadas por Ana?
- ¿Cuáles son las dos ecuaciones que plantean el problema de Ana?
- ¿De qué tipo de ecuaciones se trata?

Resuelve el sistema de ecuaciones.

- ¿Cuáles son los dos números a los que se refiere Ana?
- ¿Podría haber otra pareja de números que cumpla las mismas condiciones?
- ¿Cómo podemos estar seguros de ello?

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

1 Patrones y ecuaciones

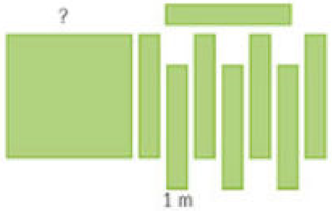
Problemas cuadráticos

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

1 Comienza a pensar

1. En tríos, analicen y comenten el siguiente planteamiento. Después respondan las preguntas con base en los acuerdos que alcanzaron.

Don Alfonso desea alfombrar una habitación de su fábrica que tiene forma cuadrada. Para ello ocupará pedazos de este material que ya tenía; uno de forma cuadrada y ocho rectangulares que miden 1 m de ancho y su largo coincide en longitud con el lado del cuadrado. También sabe que con esas piezas de alfombra, sin cortarlas, podrá cubrir 165 m^2.



a) ¿Se alcanza a cubrir todo el piso de la habitación con la alfombra? _______ ¿Por qué? Explica y representa tu conclusión:

b) Si falta espacio por cubrir, ¿cuánto sería? _______ ¿De qué forma y con qué dimensiones debe cubrirse la parte faltante? _______ Explica y representa tu respuesta:

c) Propón una forma para resolver el problema con una ecuación:

d) Comparen su procedimiento con el que utilizaron otros tríos y analicen si son similares.

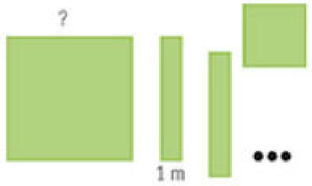
i) ¿Todos procedieron de la misma forma?

ii) Si hay métodos de resolución diferentes, anota las similitudes y diferencias entre ellos en tu cuaderno.

2 Analicemos juntos

1. Analiza el siguiente caso y discutan sus observaciones en sesión grupal guiada por el profesor. Después responde lo que se te pide.

Ahora considera que don Alfonso sólo tiene los siguientes fragmentos de alfombra: un cuadrado y varios pedazos rectangulares de 1 m de ancho por la misma longitud del lado del cuadrado. Además, sabe que con un cuadrado más pequeño de alfombra y los pedazos que se tienen puede cubrirse un área de 225 m^2.



a) ¿Cuál es la dimensión del pedazo cuadrado más grande? Plantea una forma de resolver el problema y utilízala para encontrar una solución.

b) ¿Puedes utilizar una ecuación para resolver el problema? _______ Si es así, ¿cuál es? _______________

i) Utilízala:

c) Compara tu forma de resolver el problema con la de tus otros compañeros.

i) ¿Todas fueron iguales? _______ ¿Encontraron la misma solución? _______

ii) Si hay métodos de resolución diferentes encuentra similitudes y diferencias entre ellos:

Diferencias	Similitudes

d) ¿Cuántas tiras de alfombra rectangulares se usarán? _______ Represéntalo:

e) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado más pequeño? _______ Expresa a continuación el método que seguiste para obtener el resultado.

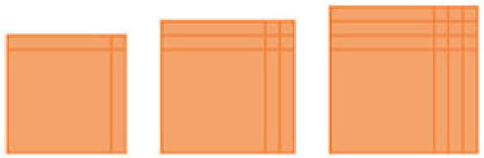
Aprende con tecnología

Para trabajar de forma gráfica las ecuaciones de segundo grado y analizar las implicaciones de la variación de los valores de las cantidades implicadas en la ecuación, puedes visitar la página web: http://goo.gl/5Qeds (consultado el 2 de diciembre de 2016)

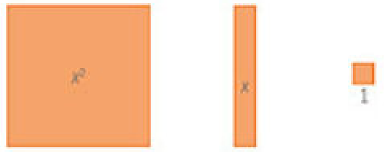
3 ¿Adónde llegamos?

1. En parejas colaborativas comenten los casos expuestos a continuación y consensen cómo resolverlos.

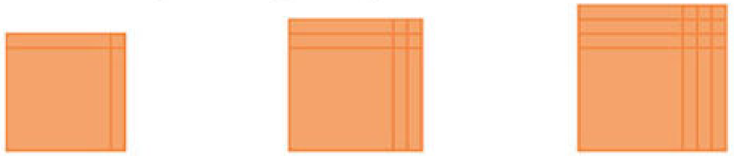
En las dos situaciones anteriores puede identificarse que se trata de "completar un cuadrado a partir de otro". Las partes que intervienen son: un cuadrado grande, uno pequeño y varios rectángulos que tienen la longitud de un lado igual a la longitud del lado del cuadrado.



a) Utilicen la relación de estas fichas con el álgebra para encontrar una expresión algebraica, a partir de que:



b) Encuentren dos expresiones algebraicas para cada uno de los casos anteriores:

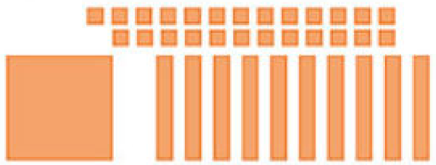


$\square^2 + \square\square + \square$ $\quad$ $\square^2 + \square\square + \square$ $\quad$ $\square^2 + \square\square + \square$

$(\square + \square)^2$ $\quad$ $(\square + \square)^2$ $\quad$ $(\square + \square)^2$

2. Ahora analiza la siguiente situación y escribe lo que se te pide.

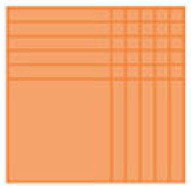
a) Con las siguientes piezas...



i) se puede tener una expresión cuadrática. Escribe los números y literales correspondientes en los espacios:

$\square^2 + \square\square + \square$

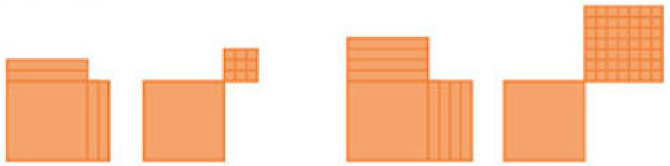
b) Con las piezas juntas puede armarse un cuadrado como el de la izquierda.



i) Este cuadrado puede tener una expresión algebraica. Escribe en los recuadros siguientes los símbolos correctos y compara tu resultado con el de tus compañeros:

$(\square + \square)^2$

c) Completa los siguientes cuadrados y escribe dos expresiones algebraicas asociadas a ellos:



i) Al completar los cuadrados, ¿qué relación observas entre el número de regletas (con las que se representa la cantidad x) y la cantidad de cuadrados pequeños (qué indican unidades)? Represéntalo:

4 Algo por aprender

La idea de completar un cuadrado puede ayudar a encontrar un método general para resolver ecuaciones de segundo grado. Considera el siguiente problema:

Josué desea trazar un rectángulo que tenga un perímetro de 20 cm y un área de 21 m². ¿Cuánto deben medir los lados de su figura?

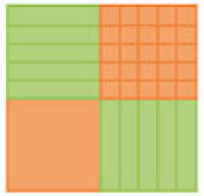
Supón que un lado del rectángulo es x:

1. En tu cuaderno, transcribe las siguientes preguntas sobre el caso anterior y argumenta tu respuesta. Luego discútelas con tus compañeros y lleguen a una sola conclusión.

a) La expresión $10 - x$, ¿qué representa en el contexto del problema?
b) ¿Y la expresión $x(10 - x)$ qué representa?
c) Respecto al enunciado del problema, ¿qué indica la expresión? $x(10 - x) = 21$? ¿Por qué?
d) ¿De dónde pudo obtenerse que $10x - x^2 = 21$?
e) ¿De lo anterior puede obtenerse $x^2 - 10x = -21$?

Conexión matemática

Las ecuaciones de segundo grado tienen varias aplicaciones en la ciencia y el arte, incluso hay métodos para resolverlas sólo con procedimientos gráficos, con regla y compás. Investiga este tipo de métodos en libros como *Matemática: Razonamiento y aplicaciones* (Millar, Charles D. *et. al.*, México, 1999), o algún otro que se encuentre disponible en tu biblioteca. También puedes hacerlo directamente en cualquier servicio de búsqueda en internet. Con certeza, encontrarás aplicaciones interesantes.



f) La expresión del lado derecho de la igualdad anterior ($x^2 - 10x$), ¿se puede asociar con un cuadrado "incompleto" que podría integrarse en su totalidad al agregar una cantidad, como indica la siguiente figura?

2. Reflexiona la siguiente información y después responde las preguntas.

Recuerda, que cuando se usan las fichas de colores y se relacionan con álgebra, unas se consideran como expresiones positivas y otras como negativas.

La figura anterior indica agregar 25 o 5^2 (5 es la mitad de 10, el coeficiente de la x, pero elevado al cuadrado) para "completar el cuadrado".

a) Entonces, la expresión $x^2 - 10x = 21$, ¿debe escribirse $x^2 - 10x + 5^2 = -21 + 5^2$? _______ ¿Por qué? ________________________________

____

b) De lo anterior se infiere que ¿$(x - 5)^2$? _______ ¿Por qué? ______________

____

c) Entonces, la relación cuantitativa implica dos casos: $x - 5 = 2$ y $x - 5 = -2$. ¿Por qué? ________________________________

____

d) Esto ayuda a obtener una solución a partir de $x - 5 = 2$, lo cual conduce a que $x = 7$. Esto es, lo que mide un lado del rectángulo, por lo que el otro lado debe medir $10 - 7 = 3$. ¿Por qué? ________________________________

____

e) Si se usa la otra posibilidad, $x - 5 = -2$, se obtiene que $x = 3$, por lo que el otro lado debe medir $10 - 3 = 7$. Representa la solución del problema:

e)

3. En las siguientes tablas se presentan varios ejemplos. Discute con tus compañeros cada caso y consensen cómo lo fundamentarían.

$x^2 + 6x - 16 = 0$	$x^2 - 18x - 40 = 0$	$x^2 - 14x + 67 = 0$
$x^2 + 6x = 16$	$x^2 - 18x = 40$	$x^2 - 14x = -67$
$x^2 + 6x + 3^2 = 16 + 3^2$	$x^2 - 18x + 9^2 = 140 + 9^2$	$x^2 - 14x + 7^2 = -67 + 7^2$
$(x + 3)^2 = 25$	$(x - 9)^2 = 25$	$(x - 7)^2 = -18$
$x + 3 = \sqrt{25}$ y $x + 1 = -\sqrt{25}$	$x - 9 = \sqrt{81}$ y $x - 9 = -\sqrt{81}$	Ya no se puede seguir adelante... ¿por qué?
$x = 5 - 3 = 2$ y $x = -5 - 3 = -7$	$x = 9 + 9 = 18$ y $x = -9 + 9 = 0$	En este caso se dice que no hay solución.

$x^2 + 2x - 1 = 0$	$x^2 - 5x - 4 = 0$	$x^2 + 12x + 36 = 0$
$x^2 + 2x = 1$	$x^2 - 5x = 4$	$x^2 + 12x = -36$
$x^2 + 2x - 1^2 = 1 + 1^2$	$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 140 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$	$x^2 + 14x + 62 = -36 + 6$
$(x + 1)^2 = 2$	$(x^2 - 5)^2 = \frac{585}{4}$	$(x + 6)^2 = 0$
$x + 1 = \sqrt{2}$ y $x + 1 = -\sqrt{2}$	$x - 5 = \sqrt{\frac{585}{4}}$ y $x - 5 = -\sqrt{\frac{585}{4}}$	$x + 6 = 0$
$x \approx 1.4142 - 1 = 0.4142$ y $x \approx -1.4142 - 1 = -2.4142$	$x \approx 2.09 + 5 = 7.09$ y $x \approx -2.09 + 5 = 2.91$	$x = -6$

4. Redacta los pasos a seguir para resolver ecuaciones cuadráticas a partir de procedimientos como los anteriores.

A este procedimiento se le denomina "completar cuadrados".

____

____

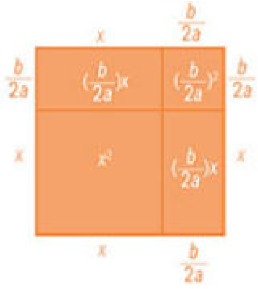
En general, se obtienen las soluciones de una ecuación de segundo grado a partir de una fórmula, pero al considerar una ecuación más complicada: $ax^2 + bx + c = 0$. Podemos suponer que $a \neq 0$, pues si es igual a cero, ya no será ecuación de segundo grado. Pero... ¿por qué? Discútanlo en sesión grupal y anota tus conclusiones.

____

____

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, parece ser diferente de las que se han resuelto con anterioridad, pero se transforma cuando se divide toda entre a y quedaría como:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$



Entonces se puede escribir $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$. Y si se completa el cuadrado en el lado izquierdo de la igualdad, se tiene:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Al realizar las operaciones algebraicas, se obtiene:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{-4ac + b^2}{4a^2}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Al extraer la raíz cuadrada de cada lado hay dos casos a considerar:

$$\pm\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Entonces, se derivan cuatro casos más:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	$-\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	$-\left(x + \frac{b}{2a}\right) = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

El primer y cuarto caso son lo mismo, y el segundo y tercero también. ¿Por qué?

____

Así, podemos escribir solamente $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$. ¿Por qué?

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Esta expresión es una **fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado**.

Aprende de los errores

Supón que un compañero te dice que la expresión $x^2 + 4 = x + 2$ es correcta... ¿Tiene razón? Y si otro compañero te indica que resolvió una ecuación de esta manera:

$x^2 + 4x = 9$
$x + 2x = 3$
$x = 1$

¿Qué comentarios podrías hacer sobre la validez de dicho proceso? ¿Cómo debería resolverse esta ecuación?

5. En parejas, consideren el siguiente problema y resuélvanlo en sus cuadernos.

Una llave conectada a una toma de agua tarda cuatro minutos más que otra en llenar un depósito, pero abriendo las dos simultáneamente se llena en 40 minutos. Ahora analicen lo siguiente:

a) ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo una sola llave? Y si una llave tarda x minutos, ¿cuánto tardará la otra?
b) Las expresiones $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x+4}$, ¿qué representan?
c) A qué se refiere la expresión $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}$?
d) ¿Cómo se relaciona $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}$ con el dato de que ambas llaves llenan el depósito en 40 minutos?
e) ¿Cómo se escribe 1 hora y 20 minutos en decimales o fracciones?
f) ¿Es falso o cierto que: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{2}{3}$? ¿Por qué? ______________________

____
g) ¿De dónde puede haberse obtenido que: $\frac{x+4+x}{x(x+4)} = \frac{2}{3}$?
h) ¿De lo anterior puede obtenerse: $6x + 12 = 2x^2 + 8x$?
i) ¿La ecuación a resolver es $2x^2 + 2x - 12 = 0$? ¿Cuáles son las soluciones que obtuvieron?

La ecuación puede resolverse de varias formas:

Factorizando en dos factores	Completando el cuadrado	Con la fórmula
$2x^2 + 2x - 12 = 0$ $x^2 + x - 6 = 0$ Como $3 + (-2) = 1$ y $3 \times (-2) = -6$ $x^2 + x - 6 = 0$ se puede escribir como: $(x + 3)(x - 2) = 0$ De aquí que las soluciones de la ecuación son: $x = -3$ y $x = 2$	$2x^2 + 2x - 12 = 0$ $x^2 + x - 6 = 0$ $x^2 - x = 6$ Completado con el cuadrado de la mitad del coeficiente de x: $x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \frac{1}{4}$ $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ $x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$ $x - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2}$ Una solución de la ecuación será: $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ Y otra solución será: $x = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3$	Para resolver una ecuación de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Como la ecuación es: $2x^2 + 2x - 12 = 0$ $a = 2, b = 2$ y $c = -12$ Sustituyendo en la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4}$ $x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{4}$ $x = \frac{-2 \pm 10}{4}$ Una solución de la ecuación será: $x = \frac{-2 + 10}{4} = \frac{8}{4} = 2$ Y otra solución será: $x = \frac{-2 - 10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$

Las soluciones de la ecuación no necesariamente son soluciones del problema, pues la ecuación es un **modelo** que representa las relaciones cuantitativas (relaciones de las cantidades), pero si se considera que $x = -3$ es la solución del problema, es decir, que una llave llenaría el depósito en -3 minutos no tiene sentido porque no existen tiempos negativos. En resumen, es solución de la ecuación con la que se modelan las relaciones cuantitativas del problema, pero no es la solución del problema. Por su parte $x = 2$ sí es una solución, pues una llave llena el depósito en 2 minutos y la otra lo llena en 6. Pero... ¿por qué? Reflexionen y discútanlo en grupo. Además debatan una forma de comprobar que se ha encontrado una solución correcta al problema.

Utilizo lo que aprendí

1. En tríos y de acuerdo a los lineamientos que indique el profesor, discutan y resuelvan los siguientes problemas en sus cuadernos. Al terminar, compartan con todo el grupo sus procedimientos y resultados.

a) La edad de Diana hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años. ¿Cuál es su edad actual?
b) El área de un rectángulo es 360 m^2 y el largo excede al ancho en dos unidades. Calculen el perímetro del rectángulo.
c) Encuentra un número positivo al que si les restas 7, al elevarlo al cuadrado da 49.
d) Carlos tiene un terreno en forma de cuadrado y su área es de 159 m^2, ¿cuánto tendría que disminuir cada lado para que el área fuera de 129 m^2?
e) La suma de dos números es 5 y su producto es −84. Hallen dichos números.
f) Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calculen las dimensiones de la finca.
g) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Encuentren el ancho del camino si su área es 540 m^2.
h) Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son?
i) Dos mangueras, A y B, llenan juntas una piscina en dos horas; A lo hace por sí sola en tres horas menos que B. ¿Cuántas horas tarda cada una por separado?
j) Encuentra la solución a las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula:

i) $2x^2 + 8x + 14 = 0$ ii) $x^2 + 4x - 8 = 0$ iii) $3x^2 + 6x + 3 = 0$

k) ¿Cuánto vale b para que las siguientes ecuaciones tengan 2, 1 y ninguna solución?

$$x^2 + bx + 4 = 0$$

l) Explica por qué las siguientes ecuaciones tienen soluciones del tipo que se indican, sin tener que resolverlas.
i) $x^2 - 2x - 3 = 0$ tiene una raíz positiva y una negativa
ii) $x^2 - x - 20 = 0$ tiene una raíz positiva y una negativa
iii) $x^2 + 10x + 25 = 0$ tiene una raíz negativa
iv) $x^2 - 14x + 49 = 0$ tiene una raíz positiva
v) $x^2 + 2x + 5 = 0$ no tiene raíces

2 Figuras y cuerpos

Cuando las figuras son parecidas, ¿qué se hace con ellas?

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

1 Comienza a pensar

1. En equipos y de acuerdo con las instrucciones del profesor, hagan la siguiente actividad.

a) Tracen en una hoja de papel un cuadrado, un rectángulo, un rombo (que no sea un cuadrado), un paralelogramo (que no sea un rectángulo), un trapecio isósceles, un trapecio que no sea isósceles y un cuadrilátero irregular (que no sea ninguno de los anteriores).

Ahora recórtenlas y dóblenlas, siguiendo como línea para el doblado una de las diagonales. Finalmente recorten cada parte.

i) ¿En todos los casos será posible hacer coincidir las partes, al doblar las figuras? Debátanlo y escriban sus conclusiones: ____________________

____

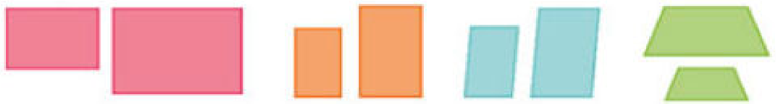
ii) Sin doblar o hacer recortes, ¿pueden saber en qué casos es posible que coincidan las partes? ______ Argumenten su respuesta: ____________

____

iii) ¿Cuáles cuadriláteros permiten formar triángulos congruentes al trazar una diagonal? ______________ Expliquen el porqué: ______________

____

b) En cada uno de los cuadriláteros trazados, ¿qué sucedería si trazaran figuras semejantes a ellos? ¿Las partes también coincidirían? Observen las siguientes figuras y discutan cómo determinar esto sin recortar ni hacer dobleces.



c) Anota las conclusiones sobre tu experiencia con la dinámica anterior.

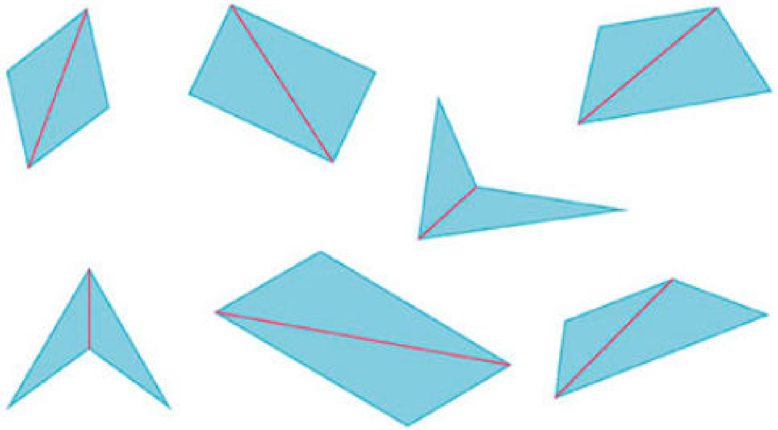
____

____

2 Analicemos juntos

1. Analiza el siguiente caso y resuelve las preguntas posteriores.

a) En cada una de las siguientes figuras identifica si los triángulos obtenidos al trazar la diagonal son congruentes. De ser así, especifica el criterio de congruencia que puede aplicarse.



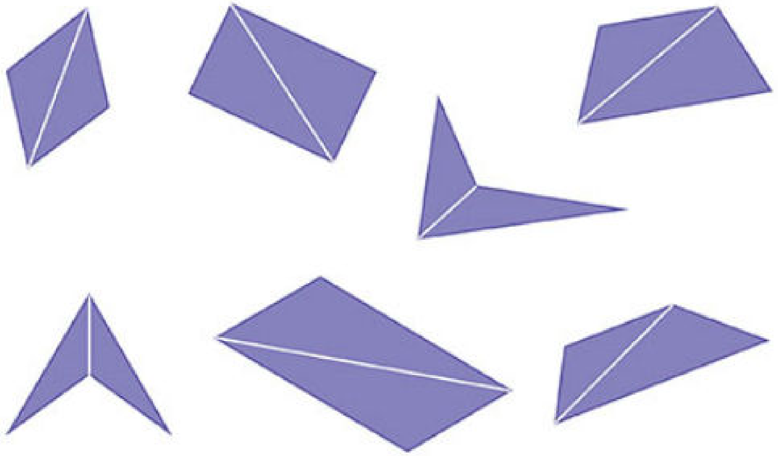
Recuerda, la congruencia entre triángulos significa que sus vértices son iguales, de tal manera que los lados y ángulos correspondientes también lo son.

i) En cada caso, ¿sólo se puede aplicar un criterio de congruencia? ______ ¿Qué otros criterios se pueden aplicar? Explícalo: ______________

____

____

b) Explica los pasos que debes seguir para reproducir cuadriláteros semejantes a los siguientes.



i) ¿Hay algún criterio de semejanza de triángulos que facilite la reproducción de las figuras? ______ Explica tu respuesta: ______________

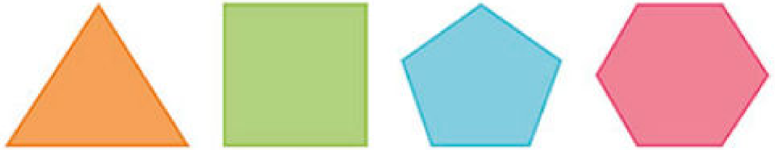
____

____

3 ¿Adónde llegamos?

1. En parejas colaborativas reproduce las siguientes figuras en una hoja de papel de color y haz la actividad. Al término, compartan su experiencia en sesión grupal.

   a) Dados los siguientes polígonos regulares, elaboren figuras congruentes y semejantes a ellos, uno más chico y otro más grande. Usa la constante de proporcionalidad que desees, pero reprodúcelas con triángulos congruentes o semejantes obtenidos de las figuras originales.



   i) Explicita (expresa clara y determinadamente) los criterios de congruencia o semejanza que puedes aplicar en cada caso.

____

____

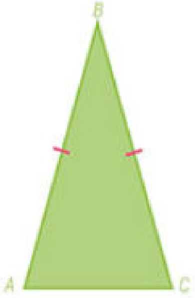
Aprende con tecnología

Para experimentar aún más en el tema de la congruencia y semejanza de triángulos puedes visitar el sitio: www.matematicasonline.es/cidead/2esomatematicas/2quincena7/index.html da clic en "Ejercicios", elige "Triángulos semejantes" y resuelve los ejercicios que se ofrecen.

Si buscas reforzar tus conocimientos sobre la congruencia de triángulos, explora el contenido de: www.profesorenlinea.cl/geometria/Triangulos_congruencia.html

Y acerca de la semejanza de triángulos, visita: http://goo.gl/nLfDU (consultados el 2 de diciembre de 2016).

4 Algo por aprender



Si en una figura se identifican triángulos congruentes o semejantes, se hace reproducciones de éstas sólo a partir de aplicar los respectivos criterios de semejanza o congruencia. Por ejemplo, considera el siguiente triángulo isósceles, que por definición es un triángulo con dos lados que tienen la misma longitud, lo cual se señala con marcas similares. Si lo recortaras y doblaras haciendo coincidir los lados de igual longitud, se determinar muchas propiedades con respecto a los ángulos opuestos a los lados iguales como la **bisectriz** del ángulo desigual y su relación con una **mediana** o **mediatriz** o **altura**.

a) En grupo, comenten y reflexionen acerca de las propiedades que se determinan haciendo dicho doblez. Registren las conclusiones alcanzadas. ____________

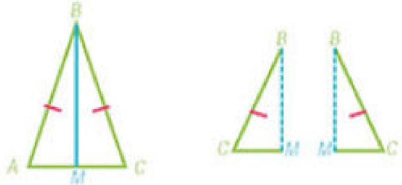
____

____

Sin embargo, un error de trazo o de recorte evita que obtengas conclusiones adecuadas. Para evitar recortar y doblar el papel, se usan los criterios de **congruencia de triángulos**.

1. Analiza los siguientes casos y responde las preguntas correspondientes.

   a) Por ejemplo, si M es el punto medio del lado desigual y se traza el segmento que une a M con B, se obtienen dos triángulos, ¿de qué tipo? ____________



   b) Al establecer una correspondencia entre los vértices de ambos triángulos: A con C, M con M y B con B, tenemos que:

      i) $AB = CB$, porque ______________________

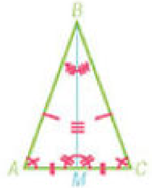
      ii) $AM = CM$, porque ______________________

      iii) $MB = MB$, porque ______________________

   c) De la igualdad de longitudes de los lados correspondientes se concluye que $\Delta AMB \cong \Delta CMB$. Explica el porqué con tus propias palabras: ____________

   ____

   d) Por lo tanto:



      i) ¿Por qué los ángulos opuestos a los lados de igual longitud tienen la misma medida? ______________________

      ii) Los ángulos con vértice M son ángulos rectos. Explica por qué: ____________

      ____

      iii) ¿La mediana respecto al lado desigual es una mediatriz? ¿Por qué? ______

      ____

      iv) La mediana respecto al lado desigual es una altura. ¿Por qué? ____________

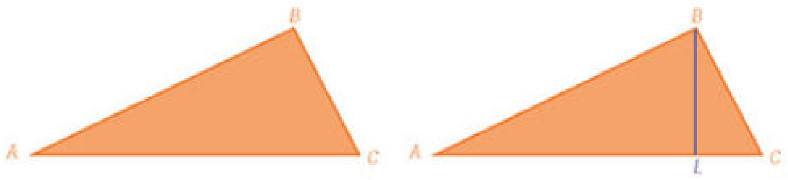
      ____

      v) La mediana respecto al lado desigual es bisectriz del ángulo desigual. ¿Por qué? ______________________

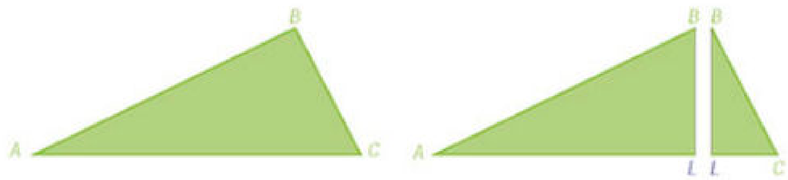
Como has podido experimentar, con los criterios de semejanza de triángulos se encuentran relaciones diversas, como las resueltas en los ejercicios anteriores y las que experimentarás a continuación.

2. En parejas, hagan las siguientes actividades y respondan los cuestionamientos.

a) Si se trazara un triángulo rectángulo y la altura correspondiente al vértice del ángulo recto:



Tendrás entonces tres triángulos, como se muestra en la figura:



i) ¿Qué relación hay entre estos triángulos? ______________________

____

ii) ¿Tienen partes con medidas iguales? ______ Márquenlas y argumenten su elección: ______________________

____

iii) ¿Hay semejanza entre los triángulos? ______ Indiquen las partes correspondientes entre ellos: ______________________

____

iv) ¿Qué criterio de semejanza de triángulos se aplica? ______________________
Escriban sus conclusiones: ______________________

____

3. Ahora es momento de practicar solo. Analiza el planteamiento y resuélvelo.

a) Con base en las figuras del inciso *a)* del caso anterior, considera los triángulos ΔABC y ΔALB y establece una correspondencia entre sus vértices que permita identificar los lados proporcionales y los ángulos con la medida.

i) El vértice A debe corresponder con __, el vértice B debe corresponder con __, y el vértice C debe corresponder con __.

ii) ¿Es válida la igualdad $\frac{AL}{AB} = \frac{AB}{AC}$? Argumenta tu respuesta: ______________________

____

iii) ¿Qué se tiene que hacer para llegar a la igualdad $AL = \frac{AB^2}{AC}$? ______________________

____

b) Al retomar las figuras del inciso a), considera los triángulos ΔABC y ΔBLC.

i) A debe corresponder con __, B con __ y C con __.

ii) ¿Es válida la igualdad $\frac{LC}{BC} = \frac{BC}{AC}$? ______ ¿Por qué? ______________________

____

iii) ¿De ella puede deducirse que $LC = \frac{BC^2}{AC}$? ______________________

c) Si lo anterior es cierto y $AL + LC = AC$, entonces $AL + LC = \frac{AB^2}{AC} + \frac{BC^2}{AC}$, lo que implica que $AC = \frac{AB^2}{AC} + \frac{BC^2}{AC}$, pero que $AC = \frac{AB^2 + BC^2}{AC}$, lo cual conduce a que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

i) ¿Qué significa este resultado? Argumenta cada paso de la deducción anterior:

____

____

____

Utilizo lo que aprendí

1. En equipos, resuelvan el siguiente cuestionario en sus cuadernos. Al término, reflexionen y debatan sus respuestas en sesión grupal, guiada por su profesor.

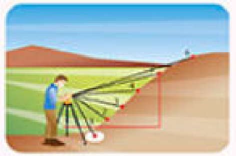
a) ¿Los triángulos congruentes pueden ser considerados semejantes? En tal caso, ¿cuál sería el valor de la constante de proporcionalidad?

b) Encuentren una argumentación basada en la congruencia o semejanza de triángulos que permita establecer la validez de las siguientes propiedades de figuras geométricas y representen todos los casos:

i) Las diagonales de un cuadrado se cortan en el punto medio y son perpendiculares.
ii) Las diagonales de un rombo se cortan en el punto medio y son perpendiculares.
iii) Las diagonales de un paralelogramo o un rectángulo se cortan en el punto medio y tienen la misma longitud.
iv) Los lados opuestos en un paralelogramo tienen la misma longitud.
v) Dos triángulos isósceles que tienen un ángulo desigual que mide 45° son semejantes.
vi) Dos triángulos rectángulos cualesquiera con un ángulo de medida 30°. ¿Cuánto mide el otro ángulo?
vii) Un hexágono regular puede construirse con tres triángulos equiláteros congruentes, de tal forma que la longitud del lado del triángulo será la longitud del hexágono regular. De esto puede deducirse cómo trazar un hexágono con regla y compás.

Conexión matemática

En nuestra vida cotidiana, la congruencia y semejanza de triángulos se utiliza para hacer mediciones indirectas, unas veces de manera repentina, otras sumamente calculadas y planeadas. En ambos casos, con experiencia y uso se llegan a dominar. Por ejemplo, chutar un balón a uno de los ángulos de una portería, usar la rampa de un estacionamiento para subir o bajar niveles, escalar una montaña, colocar una escalera en un edificio o casa, una calle o avenida con pendiente, un portarretrato en un buró...



Aprende de los errores

Si un amigo te dice que todos los triángulos rectángulos son semejantes, ¿qué le dirías? ¿Es falsa o verdadera su afirmación?

Si otro amigo te dice que todos los triángulos rectángulos que también son isósceles, son semejantes ¿Es verdadera o falsa su afirmación?

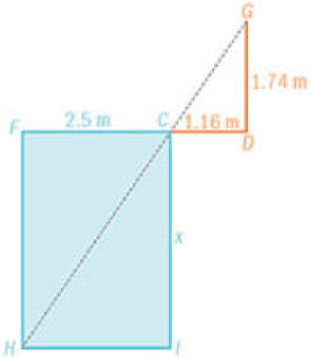
b) ¿Cuánto mide cada una de las alturas del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 unidades? ¿Cuánto deben medir las alturas de un triángulo rectángulo de lados 9, 12 y 15 unidades?

c) ¿Cuánto mide la altura de un triángulo equilátero en el cual uno de sus lados mide 2 unidades? Después de obtener este resultado, calculen, con una multiplicación, la medida de las alturas de los triángulos equiláteros de lados 1, 4, 12 y 15 unidades.

d) Calculen la medida de las alturas de un triángulo isósceles cuyos ángulos opuestos, a los lados de longitud 1 unidad, tienen una medida de 45°. A partir de este resultado, calculen, con una multiplicación, la medida de las alturas de los triángulos isósceles semejantes que tienen lados de igual longitud de 2, 4.7 y 12 unidades.

e) Si un cuadrilátero tiene vértices *A*, *B*, *C* y *D*, ¿qué condiciones debe cumplir para que, al trazar una de sus diagonales, resulten dos triángulos congruentes?

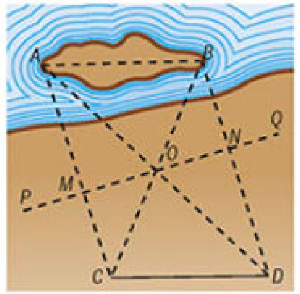
2. Resuelve los siguientes ejercicios. Recuerda consultar a tu profesor en caso de tener dudas.



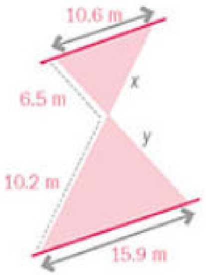
a) La siguiente figura muestra una técnica para medir la profundidad del agua en un pozo cuando puede observarse desde afuera. Considera que la entrada del pozo mide 2.5 m de ancho. Si se toman las medidas indicadas en la figura:

i) Encuentra la profundidad (x) a la que se encuentra el agua.

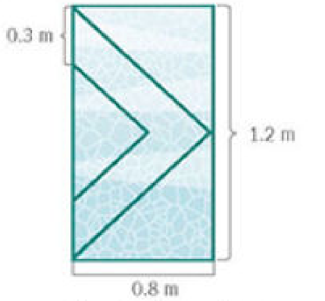
ii) Calcula la distancia del punto *G* hasta el punto *H*.



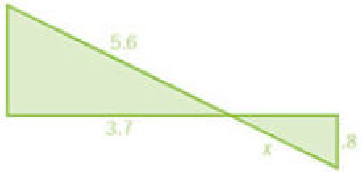
b) Dos orillas opuestas de un río, que se pueden considerarse como rectas paralelas, tienen las distancias marcadas hasta una roca que sobresale en la corriente. Si desean determinar las longitudes de x y la de y, con el fin de cotizar la construcción de una estructura en esa parte del río. Calcula dichos valores.

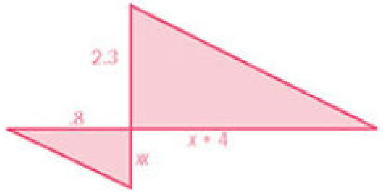


c) En una ventana se construye un adorno como el de la figura. Encuentra todas las longitudes de las partes rectas del diseño, considerando que los triángulos son isósceles y de lados paralelos.



d) Encuentra la longitud del lado marcado con x en las siguientes figuras:





e) En dos triángulos de igual perímetro, si se designa por ΔLMN a uno de ellos y se sabe que sus lados miden:

$LM = 5x + 3$ $\quad$ $LN = 2x + 2$ $\quad$ $MN = 8x + 1$

Si el otro triángulo es ΔRST y sus lados son:

$RS = 3x + 13$ $\quad$ $RT = 4x + 8$ $\quad$ $ST = 6x + 9$

i) ¿Habrá algún valor de x que pueda hacer que los triángulos sean congruentes?

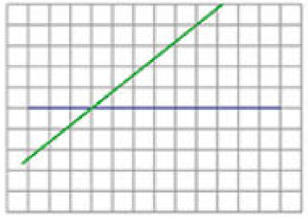
Resolviendo con Tales

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

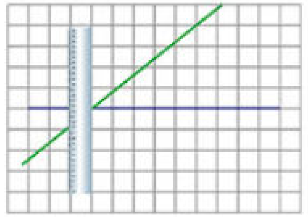
1 Comienza a pensar

1. Guiados por el profesor, hagan la siguiente actividad.

   a) En una hoja cuadriculada tracen dos rectas como la azul y la verde de esta figura:



   b) Coloca una regla de forma perpendicular a la recta horizontal (azul), en el punto en donde se intersectan (cruzan) las rectas.



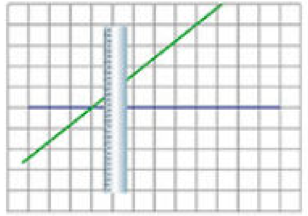
____

Glosario

Recta oblicua. Es aquella que cruza a otra línea creando un punto de intersección; los ángulos que forman son diferentes.

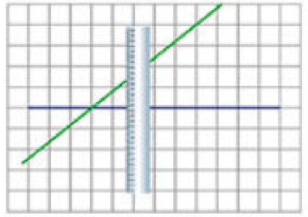
Este tipo de recta no es perpendicular ni paralela a un plano.

   c) Si desde el punto de cruce avanzas a la derecha una unidad en la recta horizontal, ¿cuánto avanzaste en la recta oblicua?



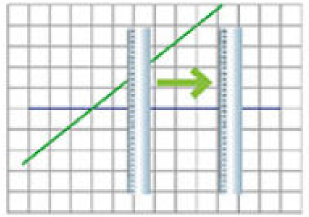
____

   d) Si desde el punto de cruce avanzas a la derecha dos unidades en la recta horizontal, ¿cuánto avanzaste en la recta oblicua?



____

   e) Elige cualquier punto en la recta horizontal y avanza tres unidades en la dirección que quieras.



      i) ¿Cuánto avanzaste en la recta oblicua? ______________________

   f) Ahora recupera las longitudes de los segmentos anteriores, desde la intersección de las rectas hasta los puntos de las rectas horizontal y oblicua que tocan la regla en la medida que esta se recorre.

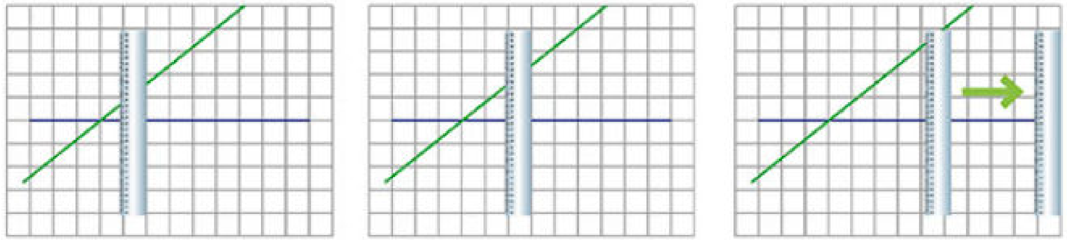
      i) ¿Qué conclusión obtienes acerca de la relación entre dichas longitudes?

      ____

      ____

      ii) Compara tus resultados con los que obtuvo tu compañero más cercano.

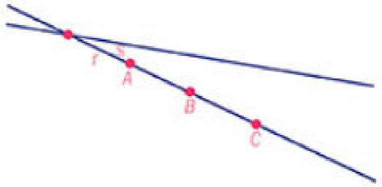
   g) Comprueba tus conclusiones al efectuar el mismo procedimiento que en la actividad anterior, pero con una línea oblicua de distinta inclinación respecto a la recta horizontal.

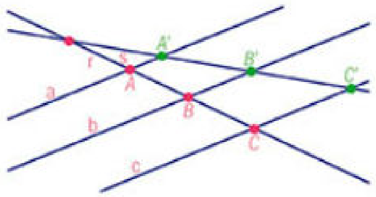


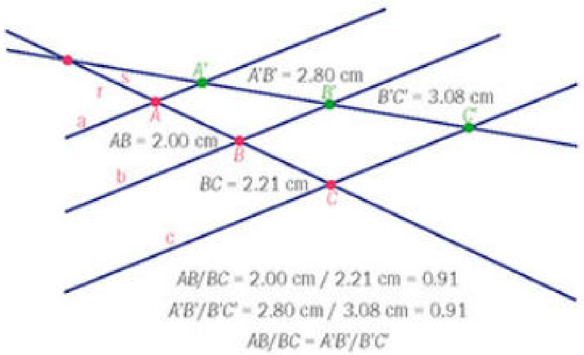
2 Analicemos juntos

1. En equipos, hagan las siguientes actividades.

   a) ¿El procedimiento anterior puede hacerse con cualquier par de rectas que se intersectan? Observen la siguiente secuencia de imágenes:



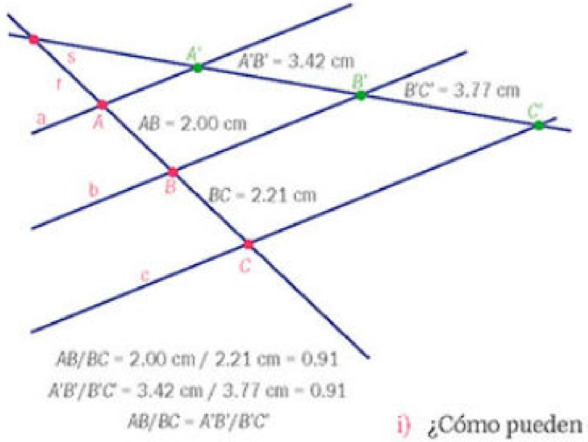


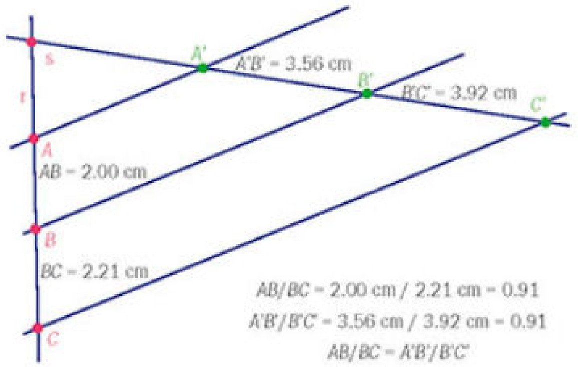


i) ¿Qué conclusiones pueden plantear en cuanto a los triángulos ($\Delta SAA'$, $\Delta SBB'$ y $\Delta SCC'$) que se forman mediante la intersección de la rectas, y de las longitudes de sus lados?

ii) Comparen sus conclusiones con las que obtuvieron otros equipos y regístrenlas.

b) Analizen las siguientes figuras y determinen si sus conclusiones anteriores también son válidas.





i) ¿Cómo pueden obtener la longitud del segmento AA' y de los segmentos BB' y CC'? Escríbanlos y expliquen su razonamiento.

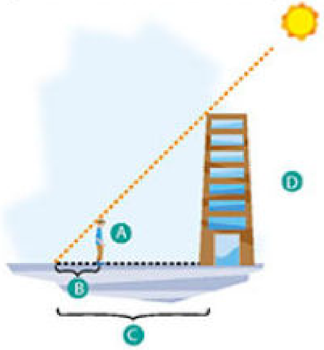
ii) Si asignan distintos valores al segmento AA', ¿se modificarían los valores de los segmentos AB, BC, $A'B'$ y $B'C'$? Expliquen su razonamiento.

iii) ¿Qué tipo de triángulos se forman? ______

¿Adónde llegamos?

1. Guiados por el profesor, analicen y resuelvan en grupo los siguientes casos.

Esta relación entre segmentos de recta puede ser de utilidad en varias situaciones; por ejemplo, en la medición indirecta de la altura de un objeto a partir de su sombra. ¿Quieres experimentarlo con tus compañeros?

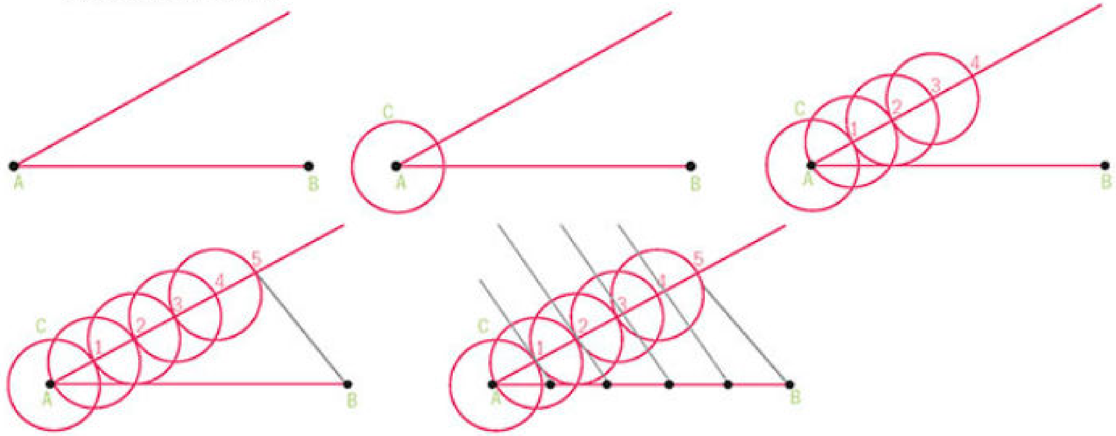


Imagina que, a una hora determinada, se mide la sombra de edificio (C) y al mismo tiempo se mide la sombra de una persona (B). ¿Podrán usarse esos datos para calcular la altura del poste o el edificio?

a) Explica cómo hacerlo: ______

Puedes ver que estas relaciones se conservan con diferentes tipos de segmentos, por ejemplo, la división de un segmento en partes iguales.

b) Analicen ahora los pasos que se efectuaron en la construcción de una rampa de estacionamiento.



c) ¿Para qué se trazaron las circunferencias? ______

d) ¿Qué relación hay entre la longitud de los segmentos que se forman a partir de los trazos de las rectas paralelas sobre la recta horizontal? ______

2. Ahora resuelve lo siguiente. Al terminar, coméntalo con tu grupo.

a) Explica cómo puede dividirse un segmento de recta en dos partes, de tal modo que la razón entre las longitudes medidas de ambas sea $\frac{2}{3}$, razón que también se puede expresar como 2:3.

b) Compara tus procedimientos con los que emplearon tus compañeros. ¿Utilizaron el mismo procedimiento? ______ Si hubo alguno diferente, compáralo con el tuyo.

____

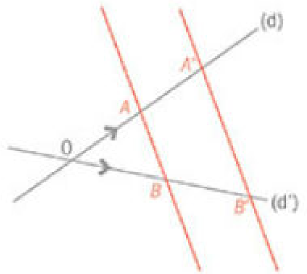
____

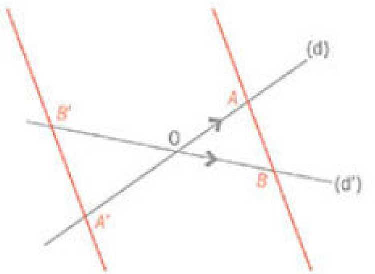
4 Algo por aprender

Las actividades anteriores son el resultado de la aplicación del **teorema de Tales** (también se escribe *Thales*), el cual establece que:

"Si tres o más rectas paralelas son intersecadas cada una por dos transversales, los segmentos de las transversales determinados por las paralelas, son proporcionales".

Con dos rectas concurrentes en un punto O. Sean A y A' dos puntos que pertenecen a una de las rectas, y B y B' dos puntos que pertenecen a la otra, entonces:



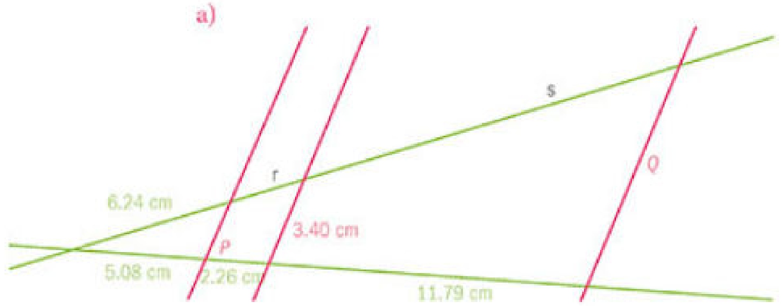


Glosario

Rectas concurrentes. Son aquellas que llegan a intersecarse en un punto, es decir, cuando dos rectas coinciden en un mismo punto.

1. Usa el teorema de Tales para calcular las siguientes distancias señaladas con letras.

a)



r = ______

s = ______

P = ______

Q = ______

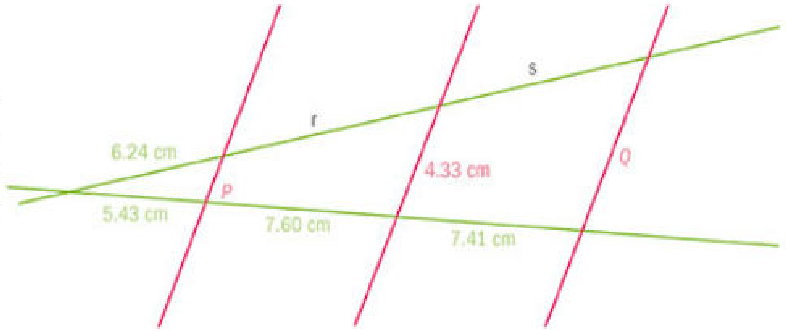
b)

r = ______

s = ______

P = ______

Q = ______



c) ¿Cómo son los triángulos que se forman en la última figura? Si es necesario, asigna nombres a los vértices para que puedas compararlos.

____

____

d) Argumenta si los criterios de semejanza pueden ser útiles para establecer relaciones entre los triángulos que se forman en los incisos anteriores:

____

____

Aprende con tecnología

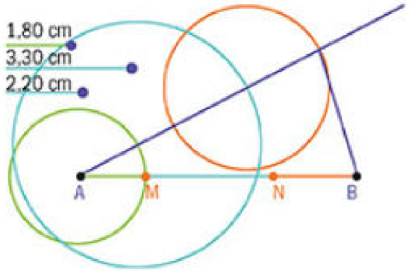
En el siguiente sitio de Geogebra puedes apreciar algunas actividades del teorema de Tales con Geogebra:
http://goo.gl/ldzsT

Y si quieres conocer un poco de la historia de este teorema, además de repasar con algunos ejemplos, visita:
http://goo.gl/Vm8f1
(consultados el 2 de diciembre de 2016).

5 Utilizo lo que aprendí

1. Con tus compañeros y guiados por su profesor, aborden las siguientes actividades. Luego comparen sus métodos y resultados.

a) Analiza el siguiente resultado de una construcción de figuras.



i) ¿Para qué se trazaron las circunferencias? ______________

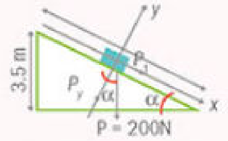
ii) ¿Cómo se aplicó el teorema de Tales? ______________

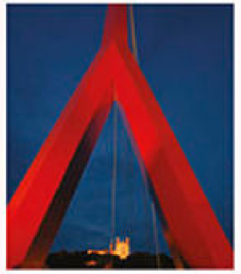
2. Lee, reflexiona y resuelve.

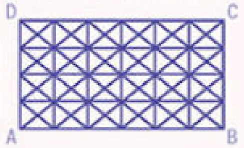
Al diseñar una escalera debe considerarse la longitud de la pisada de quienes la utilizarán (huella), el alto del escalón (peralte) y la inclinación de la rampa en la cual se construirá la escalera.

Conexión matemática

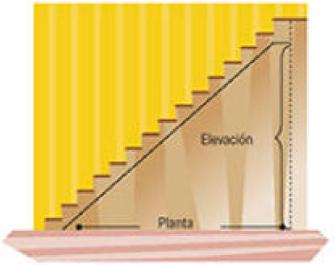
La semejanza de triángulos se utiliza frecuentemente en problemas de aplicación de física e ingeniería, como en la construcción de estructuras.







a) Utiliza el teorema de Tales para trazar la siguiente escalera. Considera que para definir la rampa se tiene una planta de 10 m y una elevación de 5 m. Haz tus operaciones en el recuadro.

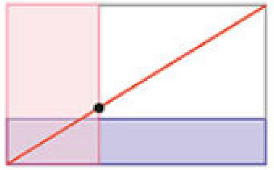


i) ¿Cuántos escalones con un peralte de 10 cm se pueden trazar? ________
¿Cuál sería el tamaño de la huella? ______

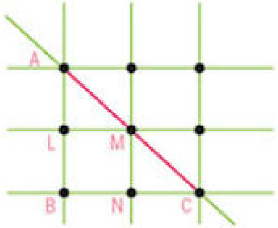
ii) ¿Cuántos escalones con una huella de 20 cm podrían trazarse? ________
¿Cuál sería el tamaño del peralte? ______

3. Escribe en tu cuaderno las siguientes situaciones y respóndelas.

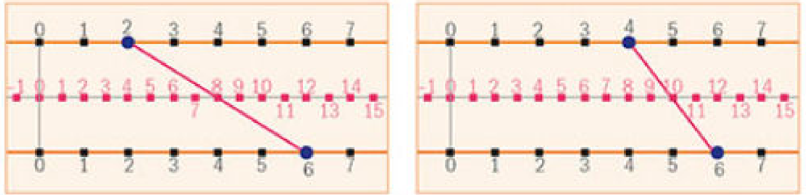
a) Utiliza el teorema de Tales para determinar las dimensiones del rectángulo horizontal, para que tenga la misma área que el rectángulo vertical.



b) Cuando se tiene la siguiente configuración y sabiendo que *M* es el punto medio del segmento *AC*, ¿qué posición tienen *L* y *M* de acuerdo con el teorema de Tales?

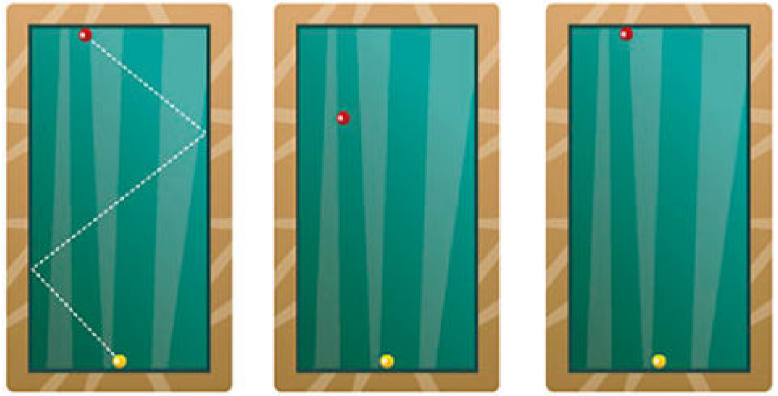


c) Utilizando este hecho diseña una calculadora para hacer sumas, como ésta:



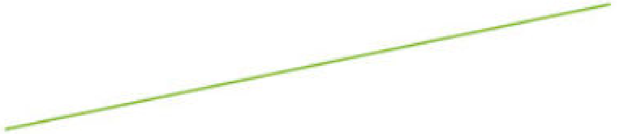
i) ¿Cómo lo harías?

d) Con el teorema de Tales explica cómo puede decidirse en dónde golpear con la bola en las bandas de una mesa de billar (orillas de la mesa) para golpear otra bola y asegurar que pase por cierto punto.



e) Tres primos de 10, 12 y 15 años deben repartirse $350 000 en partes proporcionales a sus edades. ¿Cuánto les corresponde? Utiliza el teorema de Tales para hallar la solución.

f) Divide el segmento en 7 partes iguales.

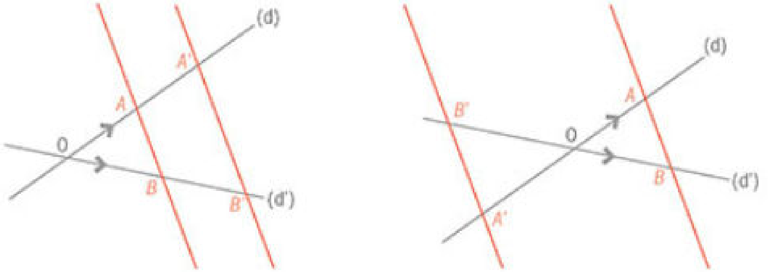


g) A partir del siguiente segmento, encuentra otro que también esté dividido en 5 partes iguales, cada una de éstas mida 2.3 cm:

h) Traza un segmento y divídelo en partes cuya razón sea:

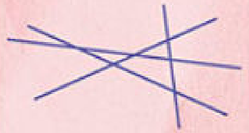
i) $\frac{2}{5}$ ii) $\frac{4}{3}$ iii) $\frac{1}{10}$

i) Obtén la longitud de todos los segmentos, sabiendo que en la figura izquierda $OA = 1.3\ AA'$ y en la figura derecha $OA = 0.66\ AA'$.



Aprende de los errores

Supón que escuchas a un amigo afirmar que cuando dos rectas no paralelas se cortan por otras dos rectas no paralelas, los triángulos que se forman son semejantes.



¿Qué le dirías? ¿Es correcta o falsa su afirmación?

Figuras homotéticas

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

1 Comienza a pensar

1. En parejas colaborativas, comenten la siguiente información y realicen las actividades correspondientes.

Hay un juego muy popular que consiste en crear por medio de las sombras de las manos diversos animales o figuras en una pared. Se pensó que esta actividad nació en China, pero todo indica que surgió en la isla de Java (en el sudeste asiático), hace aproximadamente unos 5000 años antes de nuestra era. A partir de ella se hacían murales y obras teatrales que luego se popularizaron en Alemania y Francia, para luego expandirse a todo el mundo.

a) ¿Estás listo para practicar? Con tu pareja, creen varias figuras de sombras y midan las dimensiones de algunas de ellas cuando acercas o alejas la fuente de luz. Luego, dibujen en cartulinas el contorno de dichas sombras con la fuente de luz en distintas posiciones. Finalmente, comparen las figuras resultantes; pueden utilizar las que sepan hacer o indagar cómo se hacen.

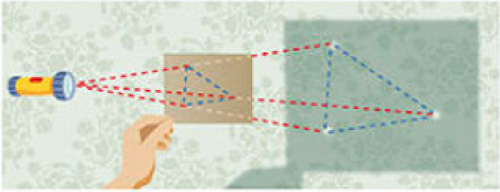
¿Las tres figuras son semejantes? ______ ¿Por qué? ____________________

____

2 Analicemos juntos

1. En sesión grupal coordinada por el profesor, hagan el siguiente experimento.

a) En una cartulina tracen tres puntos como vértices de un triángulo y perforen en cada uno de éstos. Después, con una lámpara iluminen la cartulina, a su vez colocada paralelamente a una pared donde se proyectará. Observa la figura que se forma con las imágenes obtenidas a partir de la perforación de la cartulina.

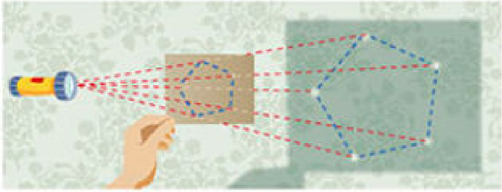


i) ¿Qué sucede si se acerca o se aleja la lámpara? ____________________

ii) ¿Las dos figuras son semejantes? ______ Si es así, ¿cuál criterio de semejanza aplicaron? ____________________

____

b) Haz otros orificios en la cartulina y observa las figuras que se forman en la pared.



i) ¿Qué sucede cuando se acerca o se aleja la lámpara? ____________________

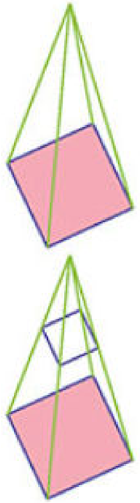
ii) ¿Las dos figuras son semejantes? ____________________

Si es así, indica el criterio de semejanza que aplicaste: ____________________

____

3 ¿Adónde llegamos?

Lo anterior puede simularse de otra forma con hilos, alambres y figuras, como cuando se elaboran adornos que se cuelgan del techo.



1. En equipos, hagan la siguiente actividad. Resalten la importancia de dialogar para generar acuerdos.

a) Con alambre, construyan un cuadrado grande y colóquenle 3 cordones de la misma longitud enlazados en el mismo lugar.

b) Ahora coloquen otro cuadrado cuyos vértices se amarren a la mitad de las cuerdas. ¿Qué dimensiones tendrá el cuadrado? ________

i) ¿Cuánto medirá el lado del cuadrado si se colocara en el primer tercio de la cuerda, considerado desde los sitios donde se amarran las 4 cuerdas?

____

ii) ¿Cuánto debe medir el lado del cuadrado si se colocara en el segundo tercio de la cuerda, también desde donde se amarran las 4 cuerdas?

____

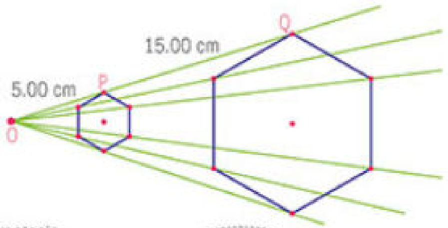
c) Ensaya utilizando otros polígonos y establece conclusiones con tu equipo respecto a la semejanza de las figuras. ____________________

____

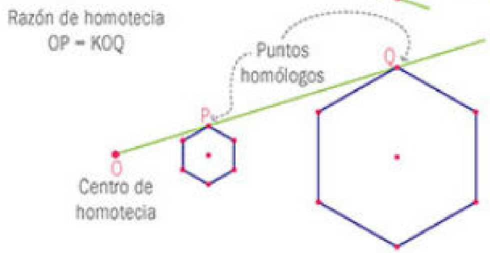
____

En la actividad anterior, la fuente de luz se representa con el amarre de las cuerdas y cada figura que se coloca corresponde a las sombras que se tendrían en la pared a medida que se acerca o aleja la fuente de luz.

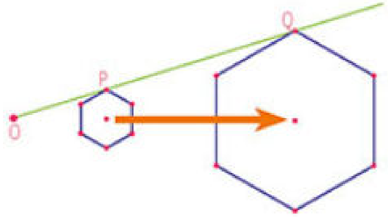
Algo por aprender



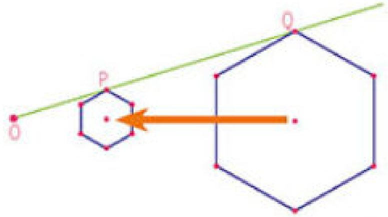
Con cualquier figura pueden obtenerse figuras semejantes por medio de las **proyecciones** desde un punto dado, es decir, **homotecias**, y las figuras involucradas se denominan **homotéticas**. Las homotecias transforman una figura plana en otra figura de igual forma, pero de menor o mayor tamaño.



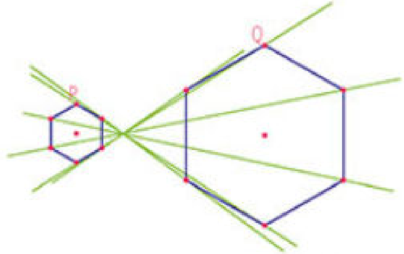
Al punto O se le llama **centro de homotecia**. Y al valor $k > 0$ que cumple la igualdad $OP = k\ OQ$, se le denomina **razón de homotecia**. A los puntos P y Q se les da el nombre de **homólogos**.



Se dice que Q es homólogo de P si a partir de la figura donde está P (la de menor tamaño) se construyó la figura donde está Q.



También se dice que P es homólogo de Q si a partir de figura donde está Q se construyó la figura donde está P.



En los casos anteriores, los puntos homólogos están del mismo lado con respecto al centro de homotecia, pero también puede ocurrir que se encuentren posiciones opuestas, como en la figura de la izquierda.

En este caso, las figuras homotéticas quedan en posiciones opuestas a O. Esto se acostumbra indicar asignando un valor negativo a la razón de homotecia; es decir, $k < 0$. Pero, ¿por qué no se usa un valor de $k = 0$? Coméntenlo en sesión grupal y anótalo: ______________________________

____

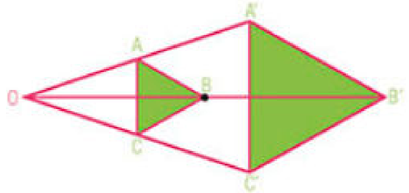
____

____

1. Discutan en grupo los siguientes casos y resuélvanlos.

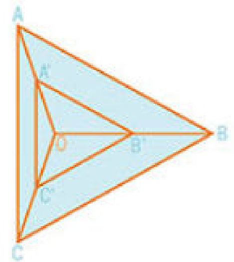
   a) Si A' es el homólogo de A, ¿qué valor puede tener k? ($k < 0$, $0 < k < 1$, $k > 1$)

   ____



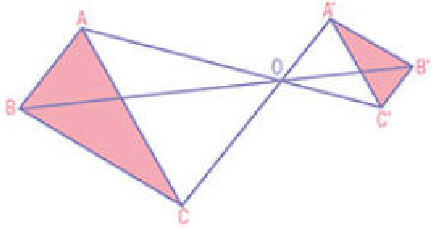
   b) Si A' es el homólogo de A, ¿qué valor tendrá k?

   ____



   c) Si A' es el homólogo de A, ¿qué de valor deberá tener k?

   ____



   i) En esta última figura, ¿qué sucede con las partes homólogas si $k = 0$, $k = 1$ y $k = -1$?

   ____

   ____

Si el centro de homotecia es O y la razón de homotecia es k, se denota la homotecia con el símbolo H_O^k.

2. Es hora de trabajar por tu cuenta. Analiza y resuelve el planteamiento.

   a) En media cartulina, dibuja un triángulo y encuentra las figuras homotéticas correspondientes a las homotecias: H_O^{-1}, H_O^{1}, H_O^{4} y $H_O^{-1/2}$. Al terminar, pidan a su profesor una sesión en el aula para exhibir sus actividades, comentarlas y obtener retroalimentación.

Aprende con tecnología

En los siguientes sitios se puede trabajar con homotecias hechas con Geogebra.
https://www.youtube.com/watch?v=7TNzYi7vWQs
http://goo.gl/YTBLK
(consultados el 2 de diciembre de 2016).

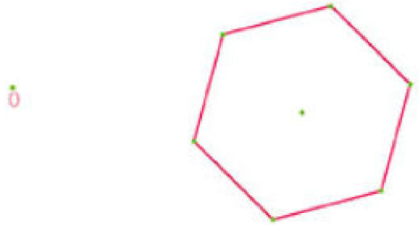
Conexión matemática

Para crear obras arquitectónicas y pictóricas también se utilizan las homotecias.

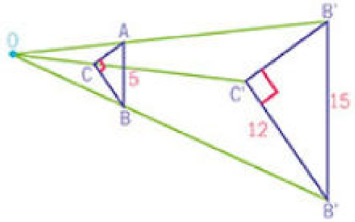
5 Utilizo lo que aprendí

1. En tu cuaderno, resuelve los problemas expuestos a continuación. Al término, solicita al profesor, junto con tu grupo, una sesión para comentar los resultados y obtener retroalimentación.

a) Dibuja un hexágono como el de la figura y aplícale las homotecias H_0^{-1}, H_0^{1}, H_0^{4} $H_0^{1/4}$ y $H_0^{-1/2}$

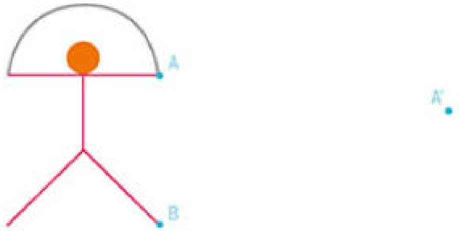


b) En la figura tienes un triángulo rectángulo ABC; su homotético es $A'B'C'$. Halla la razón de la homotecia y calcula la longitud de CB.

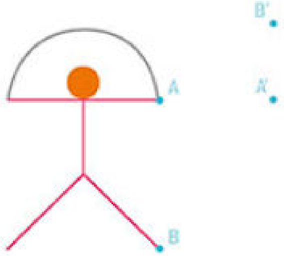


c) Completa la figura sabiendo que:

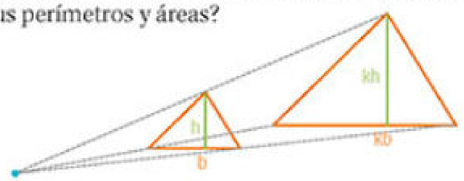
i) A' es la imagen de A y que la razón de homotecia es 3. Indica el centro de homotecia.



ii) A' es la imagen de A, y que B' es la de B. Indica el centro y la razón de homotecia.



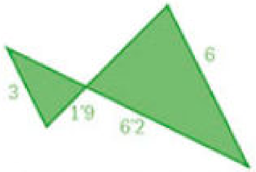
d) Si dos triángulos son homotéticos con razón de homotecia k, ¿qué relación hay entre sus perímetros y áreas?



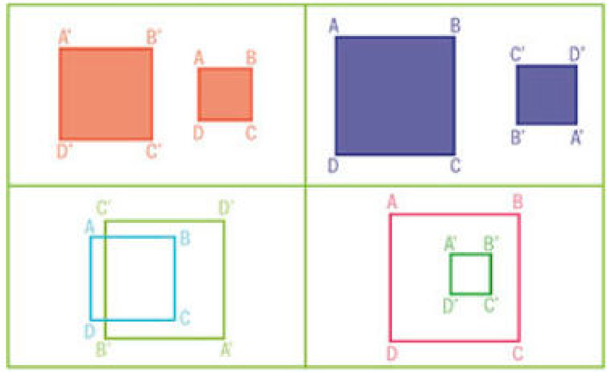
e) ¿La relación entre las áreas se mantiene para cualquier par de figuras homotéticas? ______ ¿Por qué? ____________________________________

____

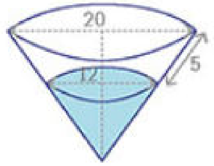
f) En la figura tienes dos triángulos. Determina si son homotéticos y obtén el centro, la razón de la homotecia y las dimensiones de éstos.



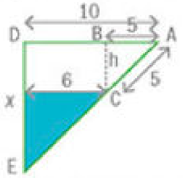
g) Señala el centro y la razón de homotecia en los siguientes casos:



h) Para un depósito cónico que contiene líquido se registran los siguientes datos:



i) Halla la profundidad del depósito si sabes que $h = 3\ m$.

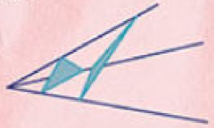


ii) ¿Qué centro de homotecia se tiene y cuál es el valor de la razón de ésta?

____

Aprende de los errores

Si tu compañero afirma que las siguientes figuras son homotéticas, ¿qué le responderías?



3 Proporcionalidad y funciones

Gráficas de funciones cuadráticas

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

1 Comienza a pensar

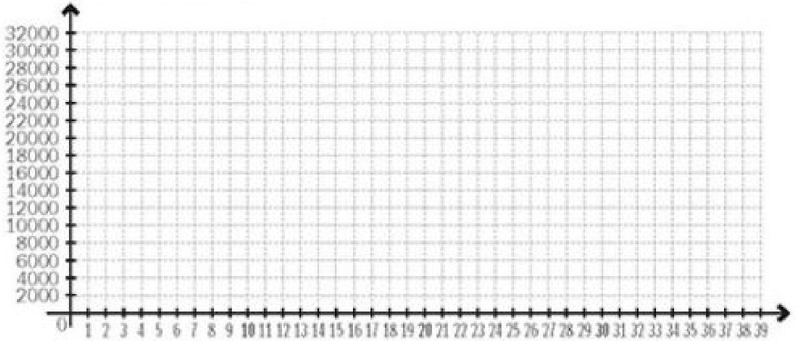
1. En equipos, analicen y comenten el siguiente caso; después resuelvan.

a) Un empresario de espectáculos estima que si cobra \$30 por entrada a un concierto, podría contar con 500 espectadores. Y que por cada \$1 que baje al precio, podrían entrar 100 personas más.

i) Completen la siguiente tabla sobre los cálculos que estima el empresario.

Pesos de descuento	0	1	2	3	4	5	x
Precio del boleto	30						
Total de espectadores	500	600					
Ingresos	(30)(500)						

ii) En la siguiente gráfica relacionen los valores de la cantidad descontada con el total de ingresos.



iii) Conforme aumenta el descuento de la tarifa inicial, ¿qué sucede con los ingresos? ______

iv) Si continúan la tabla, ahora agregando valores de descuento mayores de \$5, ¿existe un máximo de ingresos posible? ______ ¿Cuál? ______ ¿Por qué sucede esto? ______

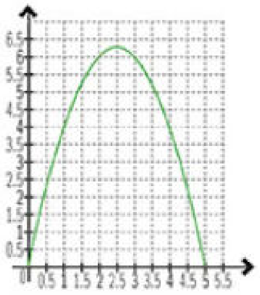
v) ¿A qué rebaja corresponde el máximo importe de ingresos? ______ ¿Cómo lo obtuvieron? ______

vi) ¿Qué representa el punto en donde la curva corta con el eje x? ______

vii) ¿Qué representa el punto en donde la curva corta con el eje y? ______

2 Analicemos juntos

1. En sesión grupal, analicen, discutan y después contesten las preguntas.



a) Don Gabriel construirá un corral de forma rectangular para sus pollos con una malla de alambre cuyo largo es de 10 m, de manera que se obtenga la mayor área posible. La gráfica de la derecha relaciona la medida del ancho del rectángulo de malla y el área que éste abarca.

i) ¿Por qué cuando el ancho es 0 o 5 m, el área es 0 m²? ______

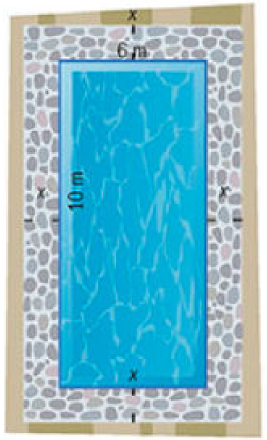
ii) ¿Con qué media del ancho del rectángulo se obtiene la mayor área? ______ ¿Por qué? ______

iii) Si representamos con x el ancho del rectángulo formado con la malla y con y el área de la medida obtenida según cambia la medida del ancho, escriba cada quien una expresión algebraica que represente la gráfica de la derecha: ______

iv) Comparen su expresión y determinen si coinciden en algo. ______

3 ¿Adónde llegamos?

1. Estudia el siguiente planteamiento y resuélvelo.



a) Doña Sara tiene una alberca rectangular cuyas dimensiones son 10×6 m, y quiere hacerle un camino alrededor, como se muestra en la figura, de tal manera que la anchura de este sea constante en todo el contorno.

i) Si consideramos que la anchura de todo el camino sería de 1 m, ¿cuál sería el área del contorno de la alberca? ______ ¿Cómo lo obtuviste? ______

ii) Considerando que x representa la anchura del contorno de la alberca y que A es su área, escribe una expresión que exponga la relación: ______

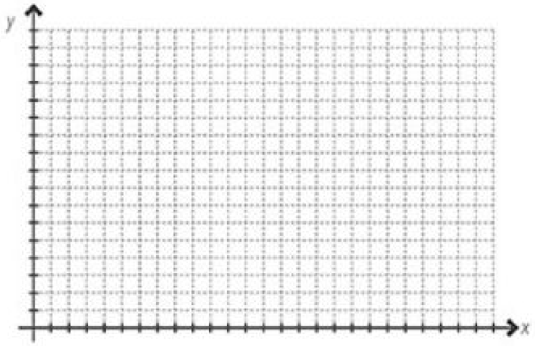
iii) Encuentra el área del contorno si la anchura fuera de...

2 m: ______ 3 m: ______ 4 m: ______

iv) Doña Sara también colocará una superficie antiderrapante (hecha a base de una goma con la que no hay probabilidad de resbalarse) sobre todo el contorno, aunque sólo cuenta con material suficiente para cubrir 105 m². Entonces, ¿cuál será el ancho del contorno? ______

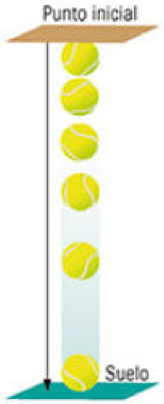
v) Utiliza la expresión del inciso ii) para hallar la ecuación correspondiente: ______

vi) Elabora una gráfica que relacione la anchura del contorno (x) con su área (A).

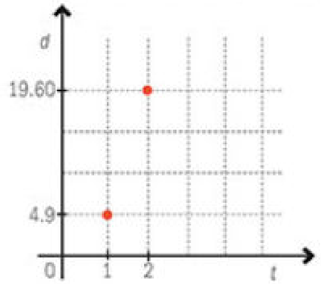


Algo por aprender

1. Reunidos en equipos, analicen la información y luego hagan lo que se pide.



a) Se soltó una pelota en caída libre y se registraron algunos datos en la tabla. Tracen la curva que pasa por los puntos marcados.



Tiempo en segundos	Distancia del punto inicial hacia el suelo en metros
0	0
1	4.9
2	19.6

b) Si se propone un modelo de variación cuadrática como el de la lección 5 del Bloque 1 referente a la caída libre.

$$y_f = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} = gt^2$$

Dónde:
y_f = posición del objeto
y_0 = posición inicial del objeto
t = tiempo en segundos
v_0 = velocidad inicial del objeto

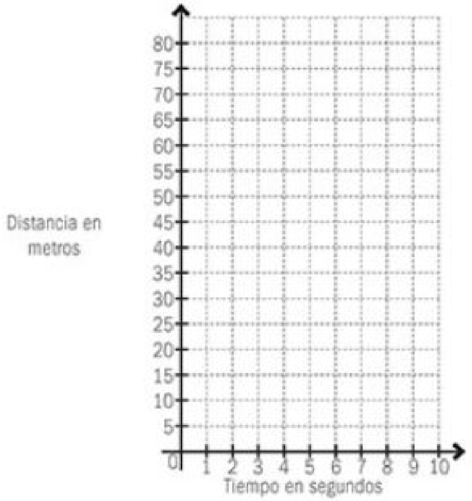
i) Si consideramos al modelo de la función cuadrática como $f(x) = ax^2 + bx + c$, ¿cuáles son los valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ de la función en el caso de la pelota, considerando que $y_f = f(x)$, $y_0 = c$, $v_0 = b$, $\frac{1}{2}g = a$ y $t = x$? Para encontrar dichos valores, completen y resuelvan las ecuaciones, para $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

- Para $x = 0$ sabemos que $0 = a(0)^2 + b(0) + c$, de donde $c = 0$
- Para $x = 1$ sabemos que $4.9 = a(1)^2 + b(1) + c$, de donde: $a + b = 4.9$
- Para $x = 2$ sabemos que $19.6 = a(2)^2 + b(2) + c$, de donde: 19.6 ______

ii) Con las expresiones obtenidas con los valores de $x = 1$ y $x = 2$, obtén los valores de a y b. Representa tu procedimiento en el recuadro:

iii) Con los valores de a, b y c, escribe el modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$, completa la tabla y después grafica.

x	$f(x)$	
0	0	(0, 0)
1	4.9	(1, 4, 9)
2	19.6	(2, 19.6)
3		(3,)
4		(4,)



¿Qué forma tiene la gráfica al unir los puntos?

____

Las **soluciones reales** en una ecuación cuadrática, obtenidas por fórmula general, al graficarse se ubican sobre el eje de las x; cuando no lo cortan, son **soluciones complejas**, se ubican por encima o por debajo del eje referido líneas arriba.

Dominio numérico. Una función es una aplicación entre dos valores reales que se relacionan por una regla definida; la relación se representa por el punto de coordenadas $[x, f(x)]$. Se dice entonces que el dominio de la función son todos los números reales.

En conclusión, sabemos que una ecuación cuadrática o de segundo grado es una expresión del tipo $ax^2 + bx + c$, y que pueden ser completas o incompletas, dependiendo de los valores de a, b y c. Asimismo nos pueden llevar a soluciones reales o complejas, es decir, los valores de x, independientemente del dominio numérico al que pertenezcan, están fijos y determinados.

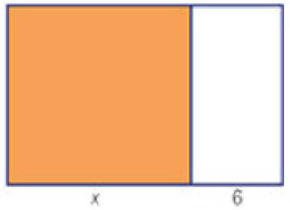
La función cuadrática es la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, o bien $y = ax2 + bx + c$, donde x es la variable independiente y y o $f(x)$ la variable dependiente.

Aprende con tecnología

Para ahondar más en el tema de las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, específicamente en la representación gráfica, ingresa al sitio http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_109_g_4_t_2.html y representa diferentes funciones de la lección en el graficador que se ofrece (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Utilizo lo que aprendí

1. En tríos colaborativos propongan un modelo cuadrático para cada situación y trabajen lo que se indica en cada caso.



a) Si en un cuadrado de x unidades por lado aumentamos a 6 unidades en dos lados paralelos obtenemos un rectángulo. Escriban la expresión que representa el área del rectángulo (R) en función del lado del cuadrado (x). Elaboren una tabla y una gráfica que represente dicha relación para algunos valores del lado del cuadrado.

Tabla	Gráfica

b) Las dimensiones de un terreno rectangular cumplen la condición de que su largo es el doble de su ancho. Completen la siguiente tabla acerca de las dimensiones del terreno. Después tracen la gráfica que relacione la medida de su ancho con su área.

Ancho	0	1	2	3	4	5	x
Largo							
Área							

i) Si el área del terreno es de 860 m², ¿cuáles son sus dimensiones? ______

______

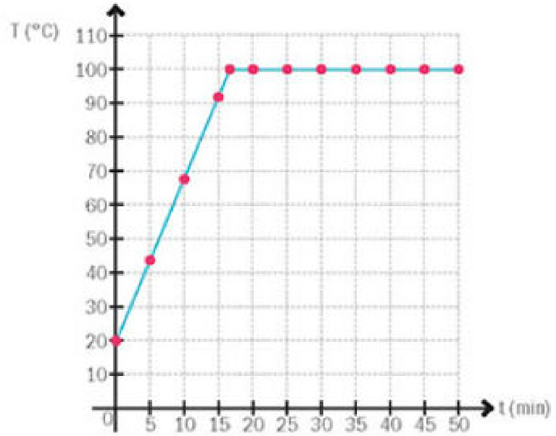
Gráficas de funciones cuadráticas II

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

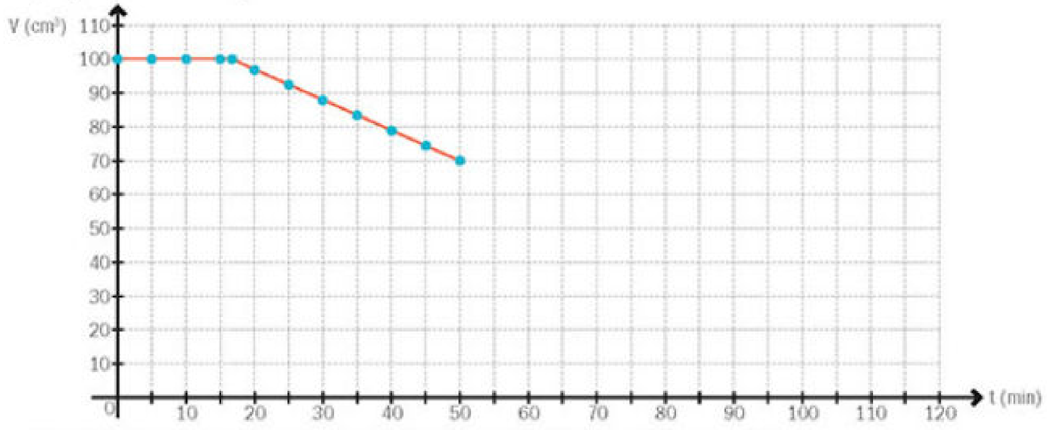
Comienza a pensar

1. Analiza el siguiente planteamiento y resuelve las preguntas posteriores.

Considera la siguiente gráfica de temperatura, respecto al tiempo, para un líquido contenido en un recipiente que se va calentando.



a) La siguiente gráfica representa la variación del volumen respecto del tiempo, para el mismo líquido.



i) ¿Qué pasa con la temperatura y el volumen del líquido conforme avanza el tiempo hasta los 50 minutos? Descríbelo: ______

______

______

ii) Llena la siguiente tabla según la información mostrada en las gráficas.

Tiempo (m)	Temperatura (°C)	Volumen (cm³)
0	20	100
5		
10		
15		
20		
25		
30		
35		
40		
45		
50		

iii) ¿Qué sucedió con el líquido de los 15 a los 25 minutos? ______________

____

iv) ¿Qué ocurre con el volumen si la temperatura permanece constante?

____

v) Entre los 30 y 50 minutos, ¿qué ocurre? ______________

____

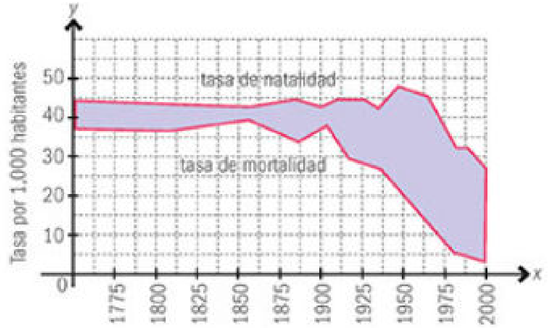
vi) Si la pérdida del volumen se refiere a un proceso de evaporación y si la tendencia sigue como se indica en las gráficas, ¿en cuánto tiempo se evaporará el líquido completamente? ________ ¿Por qué? ______________

____

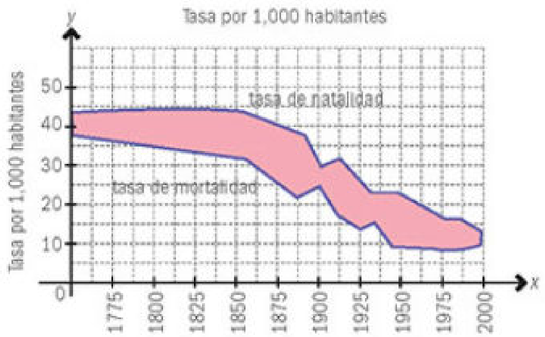
2 Analicemos juntos

1. En equipos, analicen las siguientes situaciones. Después, coordinados por el profesor, coméntenlo en sesión grupal y obtengan retroalimentación.

El crecimiento de la población es una problemática mundial que desde el siglo pasado, cuando comenzó a experimentarse la sobrepoblación (muchas más personas de las que deben habitar una misma región), ha preocupado a gobiernos y sociedades en muchos países del mundo, como México, India, Estados Unidos, entre otros; las siguientes gráficas ilustran dicho problema. Por ejemplo, en los países poco desarrollados se presenta la tendencia:



En los países desarrollados la tendencia es otra:



a) ¿Qué pueden decir respecto a la problemática de las tasas de nacimiento y muerte en cada contexto?

____

b) ¿En qué años se produjeron descensos y ascensos importantes en los valores de dichas tasas?

____

c) Estas gráficas no pueden representarse fácilmente mediante ecuaciones sencillas; no obstante, si se sabe "leerlas" o interpretarlas pueden obtener mucha información. Pidan ayuda a su profesor.

d) Ahora construyan en su cuaderno la gráfica correspondiente a la tabla.

El consumo de electricidad de una vivienda a distintas horas del día se refleja así:

Tiempo (h)	0	4	8	12	16	20
Consumo (kWh)	0.4	0.1	0.6	0.3	0.7	1

i) ¿Tiene sentido unir los puntos de la gráfica construida? ______________ ¿Por qué? ______________

____

ii) Ahora escriban una descripción de la gráfica obtenida: ______________

____

3 ¿Adónde llegamos?

1. En parejas, comenten y discutan lo siguiente. Registrendo sus conclusiones una vez que las hayan consensuado.

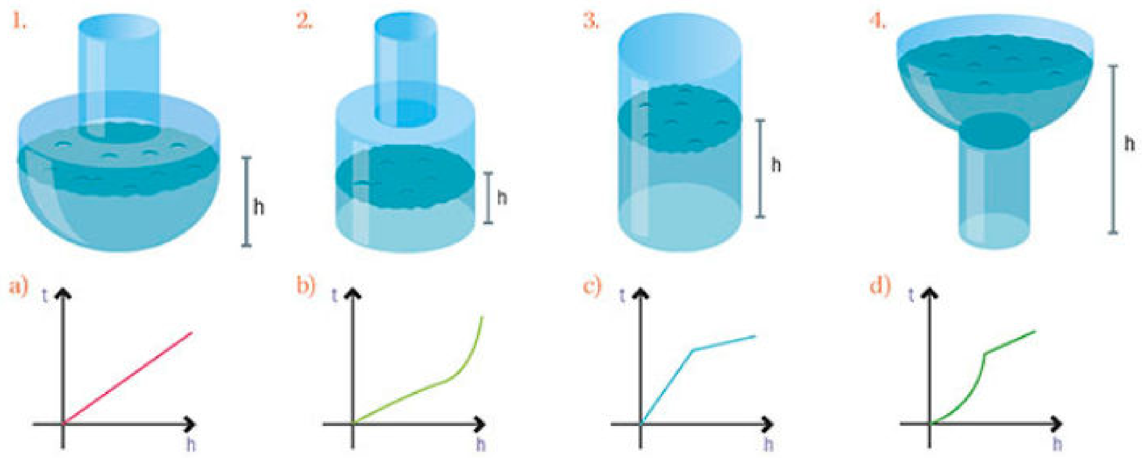
Las siguientes gráficas representan el llenado de recipientes conforme varía la altura que va alcanzando el líquido en relación con el tiempo.

Conexión matemática

Para saber cuántas personas ocupamos el territorio mexicano, cuántas de estas son niños, adultos mayores, jóvenes..., a qué nos dedicamos, con qué servicios (luz, agua, drenaje...), cuántos nacemos en determinado periodo (tasa de natalidad) o cuántos morimos (tasa de mortalidad), entre muchos más ámbitos medibles que tienen que ver con el desarrollo de una población, existe en el país el Instituto Nacional de Estadística y Geografía, INEGI. Puedes visitar su página web: www.inegi.org.mx

Guiados por su profesor, exploren el sitio en internet, vayan a la sección "Estadística", de ahí a "Glosarios", y seleccionen alguna variable, conozcan de qué se trata y después deliberen para elegir alguna que puedan expresar mediante una función cuadrática para luego graficarla.

a) Asocien cada uno de los 4 recipientes con su respectiva gráfica y justifiquen sus respuestas.



i) 1 (   )
Justificación: ____________________

ii) 2 (   )
Justificación: ____________________

iii) 3 (   )
Justificación: ____________________

iv) 4(   )
Justificación: ____________________

b) Compara tus respuestas y justificaciones con otra pareja.

i) ¿Coinciden en algo? ____________________

ii) ¿Qué sección de la gráfica corresponde a las partes cilíndricas de los recipientes? _______ ¿Por qué?____________________

____

iii) ¿Qué sección de la gráfica corresponde a las partes esféricas de los recipientes? _______ ¿Por qué?____________________

____

Aprende con tecnología

Para recuperar a manera de resumen los conceptos y metodología del tema "Gráficas de funciones cuadráticas" respecto al modelado de diversos fenómenos, visita la página en internet:
http://es.slideshare.net/Rockerleo/graficas-de-funciones-cuadraticas (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Algo por aprender

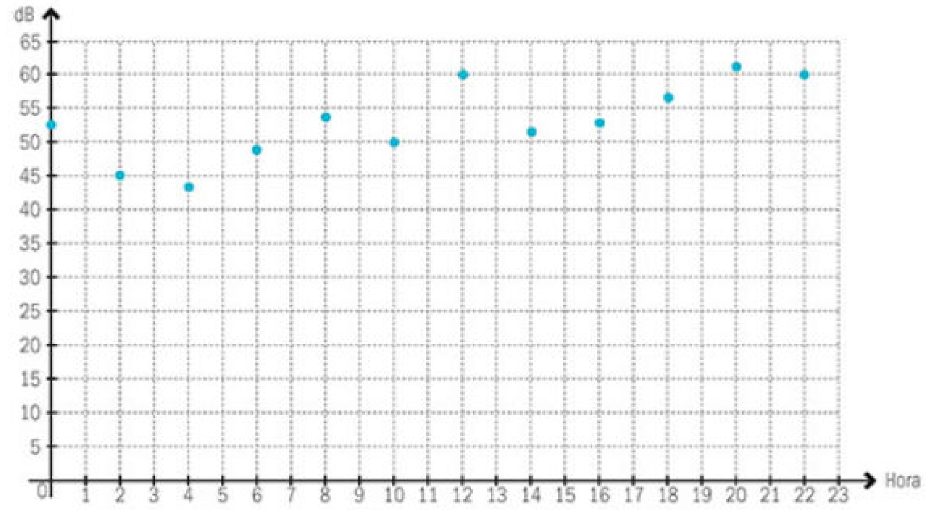
1. En grupo, debatan el siguiente caso y coméntenlo. Luego, coordinados por el profesor, lleguen a acuerdos para responder los cuestionamientos.

En muchas ocasiones la interpretación de una gráfica que modela una situación o fenómeno real consiste en analizarla de manera seccionada, ya que dichos fenómenos o situaciones se comportan de maneras diferentes según los intervalos, que pueden ser de tiempo, distancia, altura, temperaturas, capacidad, etcétera.

Por ejemplo, un departamento de investigación en contaminación del ambiente, recabó los siguientes datos acerca del nivel de contaminación acústica de una zona en una de las ciudades más pobladas del mundo; la medición se efectuó a intervalos de dos horas de un día de trabajo. Los valores registrados son los siguientes:

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Nivel (dB)	53	45	43	49	53	50	60	52	53	56	61	60

Si ubicamos en un plano los pares ordenados obtenidos de las mediciones de tiempo respecto al nivel de contaminación acústica, tenemos lo siguiente:



a) ¿Tiene sentido unir los puntos de la gráfica anterior? __________ ¿Por qué?

____

b) ¿Qué utilidad tendría unir dichos puntos? ____________________

____

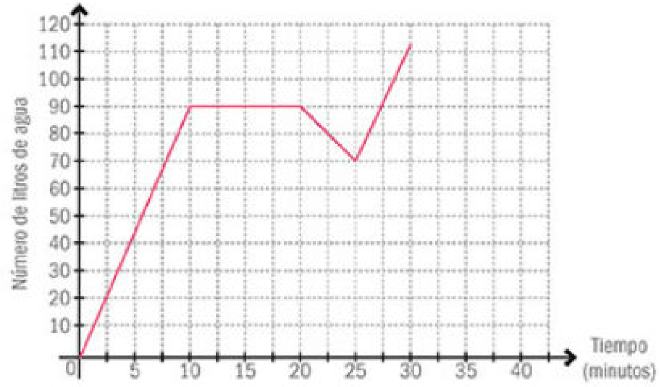
Como puede ver hay graficas formadas por segmentos de rectas, que son aquellas en las que tiene sentido unir los puntos formados por ciertas parejas ordenadas en específico, pero... ¿habrá graficas en las que no tenga sentido unir los puntos? _______ Da un ejemplo: ____________________

____

Utilizo lo que aprendí

1. En parejas, comenten las siguientes situaciones y contesten lo que se solicita. En caso de duda, consulten a su profesor.

a) Analicen la siguiente gráfica que representa la variación de la cantidad de agua en un tinaco de una casa a partir de que se abre la llave para ser llenado, y que permanecerá abierta para que fluyan 18 litros cada 2 minutos.



i) ¿Cuántos litros de agua tiene el tinaco al minuto 10? ______

ii) ¿Por qué no es uniforme el llenado del tinaco? ______

iii) ¿En qué lapsos no se utiliza agua? ______

iv) ¿Qué sucede con la cantidad de agua entre los minutos 10 y 20? ______ ¿Por qué? ______

v) ¿Cuántos litros de agua se utilizaron entre los minutos 20 y 25? ______

b) La siguiente gráfica representa el recorrido que hizo Juan para comprar de un regalo.

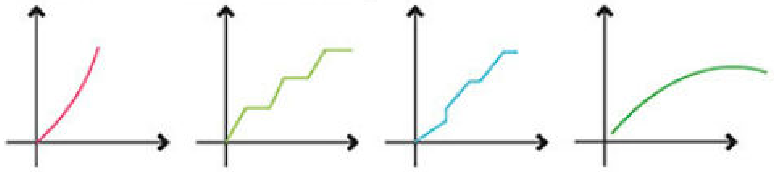
i) ¿A qué distancia de la casa de Juan queda la tienda de regalos? ______

ii) ¿Cuánto tiempo tardó en hacer la compra? ______

iii) ¿A qué velocidad se desplazó de la tienda a su casa? ______

iv) Si llegó a las 11:30 horas a la tienda, ¿a qué hora salió de su casa? ______

c) Las siguientes gráficas representan la altura que alcanzan varios elevadores en movimiento en función del tiempo.



i) ¿Cuál gráfica indica qué elevador sólo subió? ______

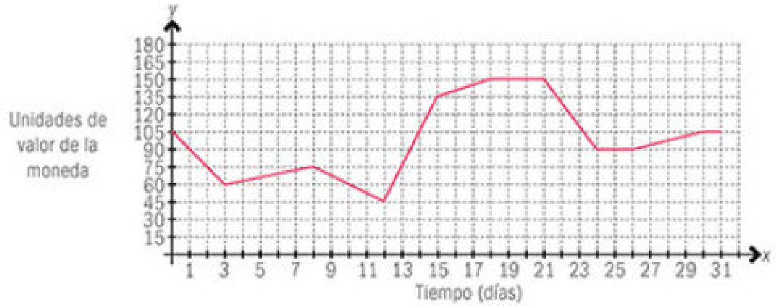
ii) ¿Cuáles indican que bajó en algún momento? ______

iii) ¿Qué gráficas muestran que el elevador se detuvo por lo menos en una ocasión? ______

iv) ¿Cuáles indican que el elevador se detuvo en más de una ocasión? ______

2. Es el momento de que trabajes por tu cuenta. Analiza el siguiente caso y contéstalo. Es importante que antes investigues a qué se refieren los conceptos agrupados a la derecha de las preguntas y comenta los resultados de tu investigación con tu profesor.

La siguiente gráfica muestra la variación de una moneda frente al euro (valor de la moneda por un euro) en el transcurso de varios días.



a) ¿En qué días la moneda regresó a su valor original desde que se inició el estudio? ______

b) ¿Cuándo permaneció el valor constante? ______

c) ¿Cuándo se depreció la moneda? ______

d) ¿Cuándo recuperó terreno la moneda? ______

e) ¿Cuándo se vendió el euro más caro? ______

f) ¿Cuándo más barato? ______

g) ¿Cuándo fue mayor la tasa de incremento? ______

h) ¿Cuándo fue menor la tasa de depreciación? ______

Euro. ______

Depreciación. ______

Tasa de incremento. ______

Tasa de depreciación. ______

4 Nociones de probabilidad

Regla del producto

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

1 Comienza a pensar

1. Lee el siguiente problema y contesta lo que se solicita.

Un juego de mesa está formado por 10 tarjetas marcadas con los números (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). Si se elige un número de manera aleatoria de los disponibles en el conjunto de cartas, determina la probabilidad de que el número seleccionado sea par y además múltiplo de 3. Exprésalo en el recuadro de la izquierda.

El espacio muestral (S) para este caso es todo el conjunto proporcionado:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Sea A, que el número sea par, y B, que el número sea múltiplo de 3. Entonces, anota los elementos correspondientes:

$A = \{$________________$\}$ $B = \{$________________$\}$

El evento compuesto A y B corresponde a los elementos que el conjunto A y el conjunto B tengan en común; por lo tanto, anota los elementos que correspondan (A y B) = {________}

Ahora comparemos los elementos anteriores respecto a las probabilidades. Considerando S como el espacio muestral determina:

$P(A) = \{$________________$\}$ $P(B) = \{$________________$\}$

Con base en las probabilidades $P(A)$ y $P(B)$, ¿cómo expresarías la probabilidad $P(A$ y $B)$? ________________________________

2 Analicemos juntos

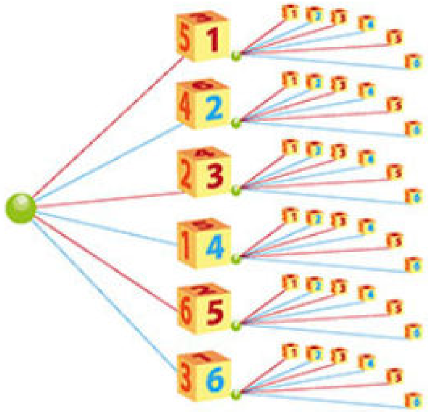
1. Ahora analicen en pareja una situación similar a la anterior, pero con el del lanzamiento de un dado.

Si arrojas un dado:

a) ¿Cuántos resultados posibles hay? ________________
b) ¿Cuántos de dichos resultados se refieren al 4? ________________
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dicho resultado? ____________
d) ¿Cuántos de esos resultados se refieren a un número par? __________
e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par? ____________
f) ¿Cuál la de obtener un número par y que este sea 4? ____________

g) Si lanzas un dado y obtienes un número par, ¿esto influirá para que en el siguiente lanzamiento obtengas 4? ______ ¿Cómo? ________________
h) ¿Qué relación hay con la probabilidad de obtener un par y que sea 4? ______

2. Observa el diagrama y responde.



Si lanzas un dado y obtienes un número impar,

a) ¿influirá para que en el siguiente lanzamiento obtengas un 3? ______ ¿Por qué? __________
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar dos veces un dado, en el primer lanzamiento salga un número impar y en el segundo un 3? ______ ¿Por qué? ____________

3 ¿Adónde llegamos?

1. En parejas, comenten y reflexionen la siguiente información. Resuelvan lo que se pide.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)					
2					(2, 5)	
3				(3, 4)		
4			(4, 3)			
5		(5, 2)				
6						(6, 6)

Analicen: ¿qué sucede si se lanzan dos dados, uno blanco y otro rojo, y se consideran los eventos "la suma es igual a 10" y "se obtiene un doble cinco"? Primero, ¿cuál es el espacio muestral de la suma de los resultados del lanzamiento de dos dados?

a) Ahora, con dichos resultados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea igual a 10? P (suma igual a 10) = ________________
b) Luego, ¿cuál es la probabilidad de que los resultados obtenidos en el lanzamiento sean doble 5? P (obtener doble 5) = ________________
c) Por lo tanto, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea 10 y que se obtenga un doble 5?: P (suma igual a 10 y obtener doble 5) = ____________
d) ¿La probabilidad de obtener una suma de 10 afecta la probabilidad de obtener el doble 5? ____________ ¿Por qué? ____________

4 Algo por aprender

Un evento **compuesto** es aquel que se forma por la combinación de varios eventos simples. Algunos de éstos son:

Eventos independientes

Dos eventos, A y B son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la del otro. A continuación ejemplificaremos algunos eventos independientes.

Aprende con tecnología

Para reforzar lo que has aprendido hasta ahora, además de practicar con ejemplos y ejercicios, explora la página de internet: http://goo.gl/gybG6 (consultado el 2 de diciembre de 2016).

En una escuela se hizo una encuesta en cada uno de los dos turnos: matutino y vespertino relacionada con la práctica de alguna actividad cultural; los datos recabados se muestran en la tabla.

	Turno matutino (M)	Turno matutino (V)	Totales
Si realiza actividad cultural (C)	10	20	30
No realiza actividad cultural (NC)	20	40	60
Totales	30	60	90

Las probabilidades que pueden calcularse son:

La probabilidad de pertenecer al turno matutino es:

$$P(M) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de pertenecer al turno vespertino es:

$$P(V) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

La probabilidad de tener actividades culturales es:

$$P(C) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de no tener actividades culturales es:

$$P(NC) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

También puede calcularse la probabilidad de que sucedan dos eventos:

La probabilidad de tener actividades culturales (C) y pertenecer al turno matutino (M) son eventos independientes, ya que el que suceda el evento "tener actividades culturales" no afecta el hecho de que pertenezcan al turno matutino.

Sabemos que la probabilidad de $P(C \text{ y } M) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$, ya que la tabla muestra dichas cantidades. Pero si lo analizamos de la siguiente manera, tenemos que $P(C) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ y $P(M) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$, por lo que $P(C \text{ y } M) = (\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$.

Regla de la multiplicación de probabilidades

Siempre que dos eventos, A y B, sean independientes, la probabilidad de $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$.

1 Guiados por el profesor, analicen el desarrollo expuesto a continuación.

Para los eventos C y V:

$P(C \text{ y } V) = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$, pero $P(C) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ y $P(V) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$

Entonces, $P(C \text{ y } V) = P(C) \times P(V)$.

Para los eventos NC y M:

$P(NC \text{ y } M) = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$, pero $P(NC) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ y $P(M) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$

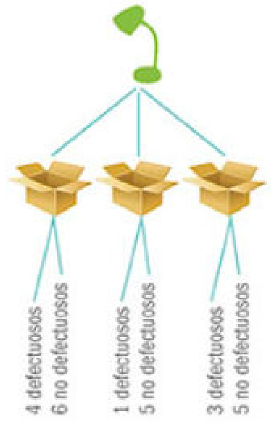
Entonces, $P(NC \text{ y } M) = P(NC) \times P(M)$.

Para los eventos NC y V:

$P(NC \text{ y } V) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$, pero $P(NC) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ y $P(V) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$

5 Utilizo lo que aprendí

1. Transcribe los problemas a tu cuaderno y resuélvelos.
   a) Lupita toma tres esferas, de la urna mostrada en la figura. Determina la probabilidad de que éstas sean negra, blanca y roja, en ese orden.
   b) Una fábrica de lámparas de buró tiene tres líneas de producción para elaborarlas y empacarlas en cajas para su distribución. Si un inspector de calidad debe supervisar la producción probando una lámpara de alguna de las cajas elegidas al azar, con base en la información de la derecha. ¿Cuál es la probabilidad de que la lámpara seleccionada sea defectuosa?



   c) Al jugar con un dado de 12 caras (dodecaedro).
      ¿Cuál es la probabilidad de que caiga...
      i) un número par primero y que luego salga el número 12?
      ii) un número impar mayor que uno?
      iii) un número impar y luego el número 1?
      iv) ¿1 o 2?
      v) De las preguntas anteriores, ¿cuáles se refieren a eventos independientes y por qué?

2. Organizados en equipos, analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

Situación 1

a) Calcular la probabilidad de obtener 1 y águila al lanzar un dado y una moneda.
b) Calcular la probabilidad de obtener 1 al lanzar el dado, sabiendo que salió águila con la moneda.

Situación 2

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par y menor que 4 al lanzar un dado?
b) Sabiendo que ya salió par, ¿cuál es ahora la probabilidad que sea menor que 4?

Aprende de los errores

Retomando el ejemplo del apartado "Algo por aprender", considera lo que hubiera sucedido si un compañero cambia los datos de la encuesta, expresándolos así:

	Turno matutino (M)	Turno matutino (V)	Totales
Si realiza actividad cultural (C)	15	23	38
No realiza actividad cultural (NC)	29	45	72
Totales	44	68	112

Y te comenta que las probabilidades de obtener eventos relacionados son:

$$P(M) = \frac{144}{112} = \frac{11}{28},\ P(V) = \frac{68}{112} = \frac{17}{28},\ P(C) = \frac{38}{112} = \frac{19}{56} \text{ y } P(NC) = \frac{74}{112} = \frac{37}{56}.$$

Cuando termina su exposición te dice que sí hay proporcionalidad en la tabla, pues las cantidades se reparten "equilibradamente". ¿Le darías la razón?

Prueba tipo PISA

I Juegos con números

De camino a casa de la abuela, los primos Roberto, Magali y Carlos quieren aligerar el trayecto jugando a adivinar números. Cada uno ya está pensando en un problema. Roberto inicia diciendo: "Si al sumar dos números dan como resultado 12 y el cuadrado de estos dos números es igual a 74, ¿cuáles son los números a los que me refiero?

Por su parte, Magali dice: "Si tres números impares consecutivos son tales que, si el cuadrado del mayor se le resta a los cuadrados de los otros dos, se obtiene como resultado 7, ¿cuáles son estos números? Finalmente, Carlos decide empezar a solucionar los problemas propuestos.

1. Formula las ecuaciones correspondientes que Magali y Carlos utilizarán para resolver el problema propuesto por Roberto: ____________________

2. ¿Cuáles son los tres números que propone Magali?
   a) −1, 1, 3   b) 4, 5, 6   c) 5, 7, 9   d) 6, 8, 10

3. Lee los enunciados y marca con una (V) si son verdaderos y con (F) si son falsos.
   a) Los valores de los coeficientes de la ecuación $-4x^2 + 1 = 0$ son: $a = 4$, $b = 0$ y $c = 1$. ( )
   b) Al resolver el discriminante de la ecuación es $x - 3x^2 = 1$, entonces me doy cuenta que esta ecuación no tiene solución en los números reales. ( )
   c) Puede asegurarse que si el valor del discriminante es igual a cero; la ecuación sólo tiene una solución ( )
   d) Un manera de reescribir la ecuación $(x - 7)^2 - (x + 4) = 1$ es $x^2 + 3x + 52 = 0$ ( )

II Librero

Armando quiere construir dos libreros de distintos tamaños con diez repisas. El estilo que quiere conseguir en cada uno de sus libreros es el siguiente:

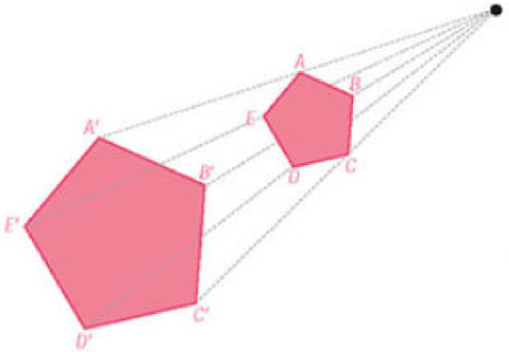
Antes de armar sus libreros, Armando recuerda que a) "Si tres o más paralelas cortan a dos transversales, en ellas pueden determinarse segmentos correspondientes proporcionales".

4. Observa la imagen del primer librero y contesta: ¿cuánto mide el segmento superior derecho?
   a) 10.5 cm   b) 12 cm   c) 16.8 cm   d) 19.2 cm

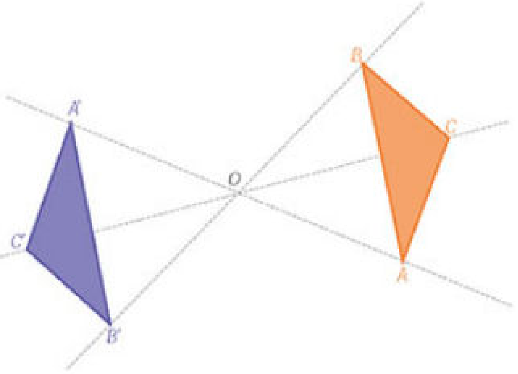
5. Sin medir las repisas, Armando quiere conocer la altura de M del segundo librero. Si tiene presente que $\frac{3}{2} = \frac{6}{M}$, ¿cuál es el valor de M? ________ cm.

6. Lee los enunciados y marca con una (V) los que son verdaderos y con (F) los falsos.
   a) Dos figuras homotéticas, además de ser semejantes, tienen la característica de que los lados de una no son paralelos a los lados correspondientes de la otra. ( )
   b) Si dos figuras son homotéticas, las rectas que unen los vértices correspondientes concurren siempre en un punto, al cual se le conoce como centro de la homotecia. ( )
   c) Una semejanza de figuras puede obtenerse a partir de una figura homotética a la que después se le aplica otra transformación como una rotación, traslación o reflexión. ( )

7. Observa las siguientes figuras y lee con atención los enunciados que las acompañan.



La figura presenta una homotecia positiva. ¿Sí o no y por qué?



La figura presenta una homotecia negativa. ¿Sí o no y por qué?

II Béisbol

Marcos suelta una pelota de béisbol, esta última empieza a moverse con una velocidad que varía de manera constante. Entonces se mide la distancia recorrida en algunos instantes y los resultados obtenidos permiten establecer que la distancia (d) en el tiempo transcurrido en segundos (t) puede obtenerse con la ecuación: $d = -2t^2 + 2t$

8. Marcos y Jorge quisieron representar con más detalle lo que experimentaron en el patio de la escuela con la pelota, ayúdales revisando las respuestas de la tabla.

Tiempo (t)	0	1	2	3
Distancia (d)	-2	0	6	-16
Sí / No	Sí / No	Sí / No	Sí / No	Sí / No

9. Marcos repitió el experimento de la pelota de béisbol y en cada uno de los casos se determinó una ecuación diferente. ¿En cuál de las siguientes tablas, la pelota alcanzó la altura más alta?

a)

(t)	0	1	2	3	4
(h)	3	2.5	2	1.5	0

b)

(t)	-1	0	1	2	3
(h)	0	3	4	3.5	2

c)

(t)	0	6.5	9	12.8	15.4
(h)	0	5	10	20	30

d)

(t)	0	3	5	7	10
(h)	0	21	25	21	0

Ponte a prueba

I Lee con atención cada uno de los problemas que a continuación se presentan y elige la respuesta que consideres correcta.

1. Dada la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ¿cuál corresponde a la ecuación $2x^2 + 3x + 1 = 0$

   a) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$
   c) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$
   b) $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$
   d) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$

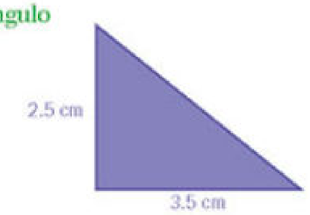
2. Si se utiliza la fórmula general para resolver la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$, ¿cuál es el resultado?

   a) $x_1 = 1$ y $x_2 = -5$
   c) $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$
   b) $x_1 = -1$ y $x_2 = -5$
   d) $x_1 = -1$ y $x_2 = 5$

3. Lalo ha enmarcado un dibujo que le hizo a su abuelo, cuyas dimensiones son de 15 cm × 20 cm. Encuentra las dimensiones del marco si la razón de semejanza entre el marco y el dibujo es de $\frac{5}{4}$

   a) $(15 + \frac{5}{4})$ cm × $(25 + \frac{5}{4})$ cm
   c) 18.75 cm × 25 cm
   b) 12 cm × 20 cm
   d) $(15 - \frac{5}{4})$ cm × $(25 - \frac{5}{4})$ cm

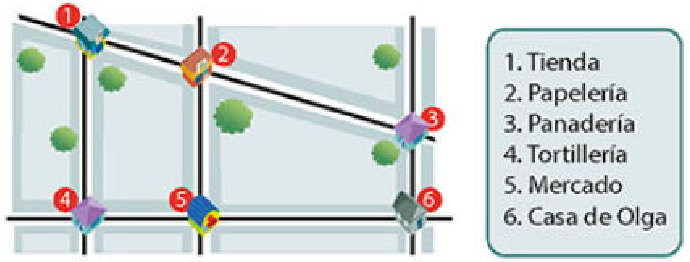
4. La maestra de Sonia, le pidió que trazara en su cuaderno un triángulo semejante al de la figura, a una razón de $\frac{3}{2}$. ¿Qué longitudes tienen los catetos del triángulo trazado por Sonia?



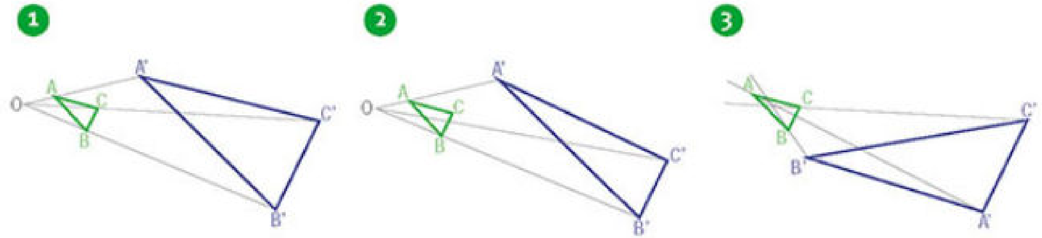
   a) 4 cm × 5 cm
   b) 1 cm × 2 cm
   c) 1.5 cm × 1.5 cm
   d) 3.75 cm × 5.25 cm

5. Olga caminó de la tienda a la papelería 300 metros, y de la papelería a la panadería recorrió 900 metros. Si de la tortillería al mercado hay 400 metros, ¿qué distancia hay que recorrer del mercado a casa de Olga? Aplica el teorema de Tales.

   a) 1 200 m
   b) 900 m
   c) 700 m
   d) Un kilómetro



6. ¿En cuál de los trazos aparecen dos polígonos homotéticos?

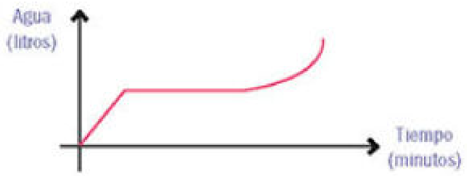


   a) Trazo 1
   b) Trazo 2
   c) Trazo 3
   d) Los tres muestran triángulos homotéticos

7. El movimiento de un proyectil se representa con la ecuación $y = (x + 1)^2$. ¿Cuál de las afirmaciones es verdadera?

   a) La gráfica correspondiente es una parábola que abre hacia arriba, pasa por los puntos (1, 0) y (0, −1)
   b) La gráfica correspondiente es una parábola que abre hacia abajo, pasa por los puntos (−1, 0) y (0, 1)
   c) La gráfica correspondiente es una parábola que abre hacia abajo, pasa por los puntos (1, 0) y (0, −1)
   d) La gráfica correspondiente es una parábola que abre hacia arriba, pasa por los puntos (−1, 0) y (0, 1)

8. Una cisterna se llenó de agua como se muestra en la gráfica. ¿Qué enunciado describe este llenado?

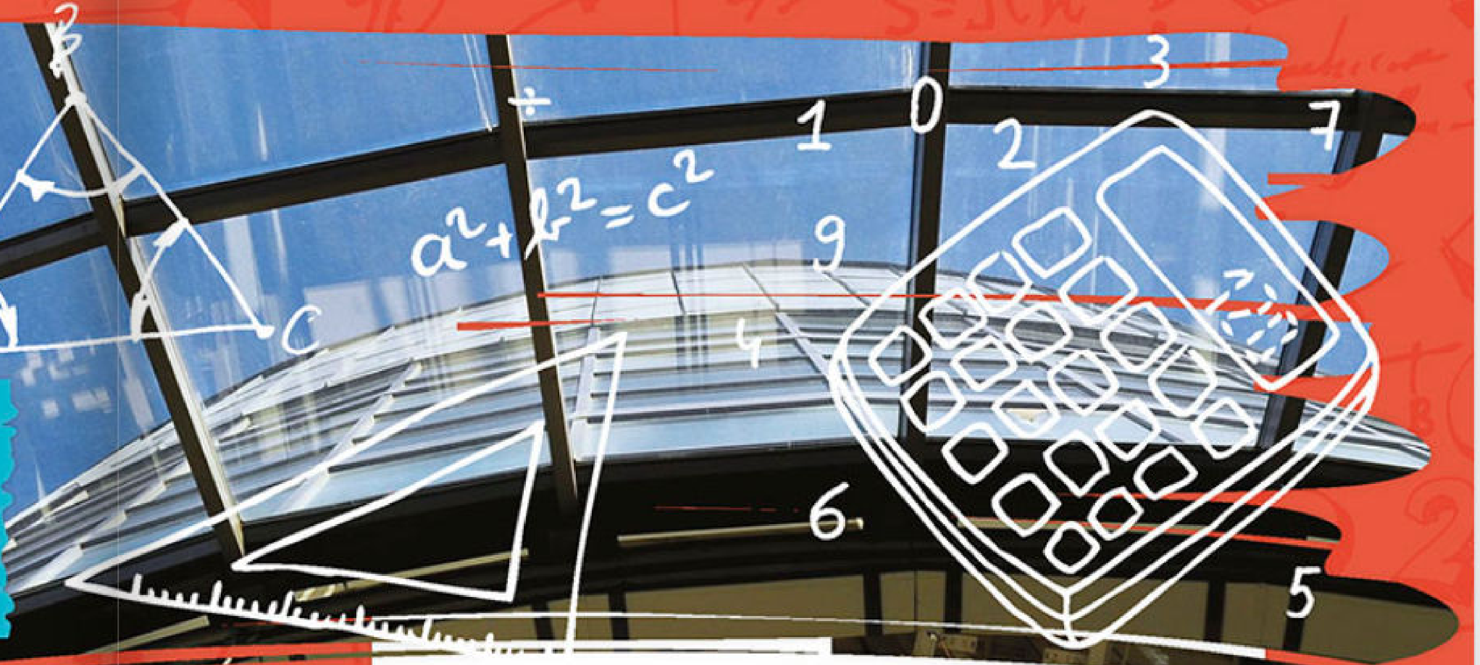


   a) La cisterna se comenzó a llenar con una llave abierta, luego de un tiempo se cerró la llave y al cabo de unos minutos, se abrieron muchas más llaves de agua para llenar la cisterna.
   b) La cisterna se comenzó a llenar con una llave abierta, luego de un tiempo se cerró la llave y al cabo de unos minutos, volvió a abrirse para llenar la cisterna.
   c) La cisterna se comenzó a llenar con muchas llaves de agua, luego de un tiempo se cerró la llave y al cabo de unos minutos, se abrió una sola llave para llenar la cisterna.
   d) La cisterna se comenzó a llenar de agua primero con una llave, después de unos minutos, se abrieron dos y posteriormente tres llaves más.

9. En una caja se metieron dos chocolates rellenos de cajeta y dos rellenos con cereza. Si el primer chocolate que se saca de la caja no se vuelve a meter en ella, ¿cuál es la probabilidad de sacar de la caja primero un chocolate relleno de cajeta y después un chocolate relleno de cereza?

   a) $\frac{1}{2}$
   b) $\frac{1}{3}$
   c) $\frac{2}{3}$
   d) $\frac{2}{4}$

Bloque 4



Ejes temáticos	Temas	Secuencia de aprendizaje
Sentido numérico y pensamiento algebraico	1. Patrones y ecuaciones	• Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión
Forma, espacio y medida	2. Figuras y cuerpos	• Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos
	3. Medida	• Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente • Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo • Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente
Manejo de la información	4. Probabilidad y funciones	• Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa
	5. Análisis y representación de datos	• Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media) • Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Activa tus competencias

Un águila pescadora que vuela a 800 m sobre el nivel del mar (msnm) descubre a un pez en la superficie del agua a un ángulo de 30 grados con respecto a la superficie misma.

- Dibuja el triángulo que será de utilidad para encontrar la distancia a la cual se encuentra el águila pescadora del pez.
- ¿Cuál es la función trigonométrica que utilizarás para resolver el problema?
- Escribe la ecuación despejada de la distancia a la cual se encuentra el pez del águila pescadora.
- Escribe la distancia a la cual está el pez de su depredador.
- Si el ángulo de visión del águila fuera de 12 grados en vez de 30, ¿a qué distancia estaría del pez si se mantiene a la misma altura?

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

1 Patrones y ecuaciones

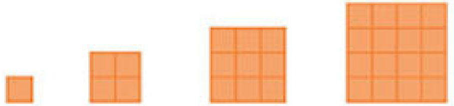
Expresiones cuadráticas y sucesiones

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

1 Comienza a pensar

1. En grupo, analicen y comenten el siguiente caso. Registren sus conclusiones.

Observen las siguientes configuraciones en las que se utilizan fichas de lecciones anteriores:



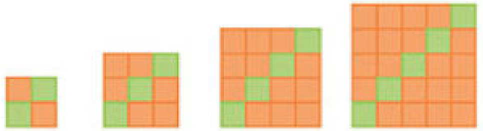
a) Escribe los números que puedes asociar con la cantidad de cuadrados pequeños:

b) Ahora escribe los primeros 10 términos que seguirían de acuerdo con las configuraciones que pueden construirse siguiendo la idea de generar cuadrados a partir de los cuadrados pequeños:

c) Anota a continuación una expresión algebraica para obtener el número que corresponde a cualquier término de la sucesión, de acuerdo con la posición (denotada con n) que ocupa en ésta. Al término general podemos denominarlo como a_n.

2. En parejas colaborativas hagan la siguiente actividad.

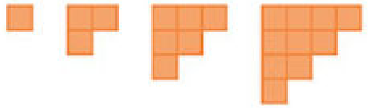
a) Analicen la forma de calcular el número de fichas naranjas que se necesitan para cubrir la parte superior del cuadrado, delimitado por las fichas verdes, y generar la sucesión asociada a la siguiente configuración:



b) Escriban los 10 primeros términos de la sucesión numérica que se genera con las fichas por encima de las verdes en cada posición:

c) Anoten una expresión algebraica para obtener el número que corresponde a cualquier término de la sucesión, de acuerdo con la posición n, que ocupa en la sucesión: a_n = ______

Lo anterior permite encontrar la sucesión numérica que corresponde a configuraciones del tipo:



A esta sucesión de números se le conoce como **números triangulares**.

d) ¿Cómo formarían con estos números un número cuadrado? Expliquen su solución y represéntenla:

e) Hagan las operaciones algebraicas necesarias para mostrar que su solución es correcta.

f) ¿Qué sucede si juntan las figuras representadas por dos números triangulares que ocupen la misma posición? ______

i) ¿Qué tipo de figura –muy conocida– se forma? ______

ii) ¿Cuál sería la expresión algebraica correspondiente para esa sucesión definida por las nuevas configuraciones?

iii) Haz las operaciones algebraicas necesarias para mostrar que tu solución es correcta.

2 Analicemos juntos

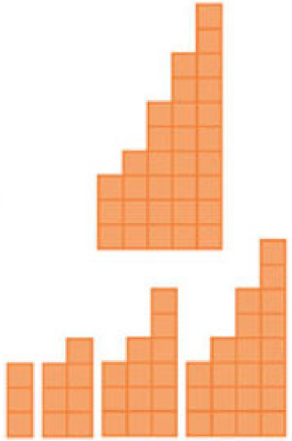
1. Con tus compañeros y de acuerdo con las instrucciones de tu maestro, discutan el siguiente caso y respondan.

a) Consideren la siguiente sucesión numérica: 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, ...

i) ¿Qué regla genera este tipo de números de acuerdo con la posición que ocupan? Coméntenlo.

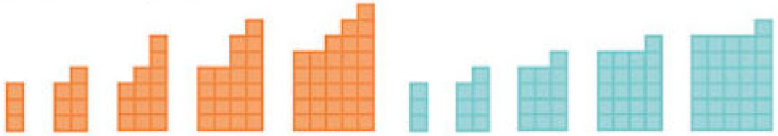
ii) La sucesión comienza sumando 4 al primer término, luego 6, ¿y qué más?

b) Revisen las siguientes configuraciones, relacionadas con esta sucesión:



c) Escriban alguna expresión algebraica que pueda obtenerse al analizar cada término de la sucesión:

d) Ahora deduzcan una expresión algebraica del arreglo de piezas expuesto a continuación y anótenla.



e) ¿Qué relación hay entre las últimas dos expresiones algebraicas que escribieron?

2. Individualmente, reflexiona y responde.

a) Ensaya otro camino. Por ejemplo, ¿habrá alguna forma de relacionar los números de la sucesión sin utilizar las fichas? Es decir, si sumas, restas, multiplicas o divides términos consecutivos, ¿se obtiene alguna regularidad que ayude a encontrar la fórmula?

3 ¿Adónde llegamos?

1. En sesión grupal guiada por el profesor, analicen lo siguiente y contesten.

La sucesión de números triangulares que trabajaron al inicio de la lección fue 1, 3, 6, 10, 15, 21, … , y lo que se puede hacer con sus representaciones con fichas también se observa si llevan a cabo operaciones entre términos consecutivos. Por ejemplo, resta los términos consecutivos (el mayor menos el menor) y se generará una sucesión nueva.

a) Escriban los primeros cinco términos de esta nueva sucesión:

☐, ☐, ☐, ☐, ☐, …

b) Continúen haciendo restas como parte del procedimiento anterior y se generará otra sucesión de números. Escriban los primeros cinco términos de esta sucesión:

☐, ☐, ☐, ☐, ☐, …

c) ¿Qué observas? Escribe tus conclusiones: ____________________

d) ¿Sucederá algo similar con las sucesiones de números cuadrados y rectangulares? ____________________

e) Efectúen las operaciones necesarias y redacten una conclusión.

2. Es momento de practicar por tu cuenta. Analiza y responde.

a) Haz nuevamente el procedimiento indicado al principio de esta actividad, ahora con la sucesión de números 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, … Registra tus operaciones y describe tu procedimiento.

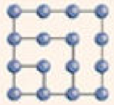
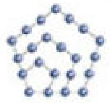
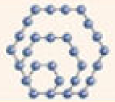
4 Algo por aprender

A partir de la sucesión de números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21, … al restar el primer término al segundo (3 – 1), el segundo al tercero (6 – 3), el tercero al cuarto (10 – 6) y así sucesivamente, se obtiene una nueva sucesión de números a la que se llama sucesión de las **primeras diferencias**, a saber: 2, 3, 4, 5, 6, …

Al hacer las diferencias entre los términos de la nueva sucesión, se genera otra que se denomina sucesión de las **segundas diferencias**, a saber: 1, 1, 1, 1, 1, …

1. Sigue el desarrollo dado a continuación y responde.

Encuentra las primeras y segundas diferencias de los siguientes números poligonales.

Configuración	Número poligonal	Sucesión
	Cuadrados	1, 4, 9, 16, …
	Pentagonales	1, 5, 12, 22, …
	Hexagonales	1, 6, 15, 28, …

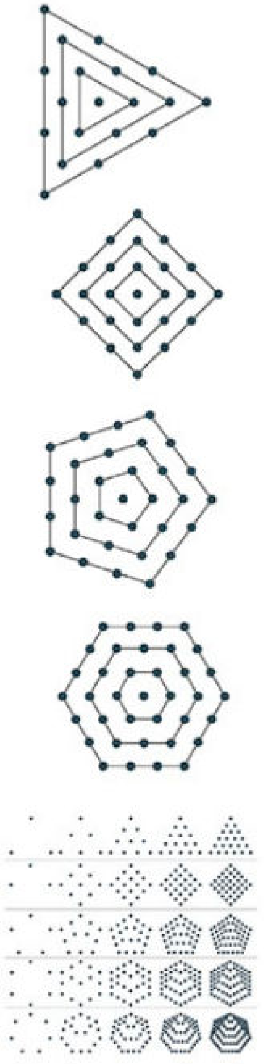
En estos casos puedes observar que las segundas diferencias siempre resultan ser constantes, es decir, dan como resultado el mismo número. Esta situación hizo sospechar a algunos matemáticos que ese comportamiento estaba ligado a la expresión del término general para la sucesión, que es de la forma $an^2 + bn + c$.

Si los términos son de la forma planteada $an^2 + bn + c$, en cada posición el término se escribiría de acuerdo con la siguiente tabla. Analízala y complétala.

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$a(1)^2 + b(1) + c$ $= a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c$ $= 4a + 2b + c$	$a(3)^2 + b(3) + c$ $= 9a + 3b + c$		

Glosario

Números poligonales. Son números que se corresponden con configuraciones geométricas relacionadas con polígonos regulares u otras figuras conocidas, construidas por puntos.



Aprende con tecnología

Para encontrar una generalización del método de diferencias visita la página web: http://goo.gl/CjHQX

Un generador de tablas de números primos que te será de mucha utilidad puedes descargarlo del sitio de internet: http://goo.gl/nwlM0 (consultados el 2 de diciembre de 2016).

En este sentido, al calcular las **primeras diferencias** tendrías (llena los espacios vacíos de la tabla):

$\begin{array}{r} 4a+2b+c \\ -\underline{\ \ a+\ \ b+c} \\ 3a+\ \ b\ \ \ \ \ \end{array}$	$\begin{array}{r} 9a+3b+c \\ -\underline{4a+2b+c} \\ 5a+\ \ b\ \ \ \ \ \end{array}$		

Con el cálculo de las **segundas diferencias** se tendría una sucesión así (también completa):

$\begin{array}{r} 5a+b \\ -\underline{3a+b} \\ 2a\ \ \ \ \end{array}$		

2. En grupo, reflexionen, comenten y obtengan retroalimentación. Redacta un breve apunte en tu cuaderno con base en las respuestas de las siguientes preguntas:

a) ¿Qué puedes observar con los resultados de las segundas diferencias?
b) ¿Cómo puede aplicarse esto para encontrar la fórmula de los números figurativos? Éstos son los números representados por puntos dispuestos en figuras geométricas como triángulos o cuadrados.
c) Con la ayuda del profesor, determina la fórmula para los números triangulares para probar el método, es decir, supón que son números de la forma $an^2 + bn + c$, y hay que determinar los valores de a, b y c. Entonces analiza la sucesión y calcula las primeras y segundas diferencias.

Sucesión	1 3 6 10 15 21 ...
Primeras diferencias	2 3 4 5 6 ...
Segundas diferencias	1 1 1 1 ...

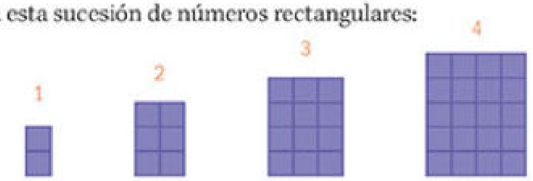
Esto quiere decir que $2a = 1$, por tanto $a = \frac{1}{2}$. También $3a + b = 2$, por tanto $b = \frac{1}{2}$, y finalmente $a + b + c = 1$, por tanto $c = 0$. Explica por qué ocurren estas situaciones.

Lo anterior nos indica que el término general de la sucesión es: $a_n = an^2 + bn + c = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$. Pero, ¿es correcto este resultado? Comprueba y redacta en tu cuaderno el porqué.

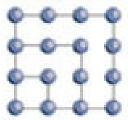
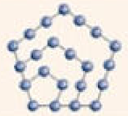
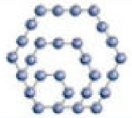
5 Utilizo lo que aprendí

1. Elabora una guía en hojas aparte, resuélvanla y coméntenla en el aula.

a) Analiza esta sucesión de números rectangulares:

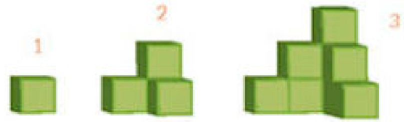


b) Aplica el procedimiento de las primeras y segundas diferencias para encontrar la fórmula de los números poligonales:

Configuración	Núm. poligonal	Sucesión	Fórmula
	Cuadrados	1, 4, 9, 16, ...	
	Pentagonales	1, 5, 12, 22, ...	
	Hexagonales	1, 6, 15, 28, ...	

i) Obtén la fórmula para esta sucesión de dos formas diferentes.

c) Considera la sucesión que se genera con la siguiente disposición de cubos:



i) ¿Cuál es la expresión algebraica que determina el número de cubos que forman la figura y que ocupa el enésimo sitio de la sucesión?

d) Encuentra las fórmulas para obtener cualquier término de las siguientes sucesiones:
i) 5, 15, 31, 53, 81, 115, 155, 201, ...
ii) 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, ...
iii) 9, 23, 45, 75, 113, 159, 213, 275, ...
iv) 5, 12, 23, 38, 57, 80, 107, 138, ...
v) 6, 17, 34, 57, 86, 121, 162, 209, ...

e) Encuentra la fórmula para otros números poligonales:

Núm. figurativo	Sucesión	Primeras diferencias	Segundas diferencias	Fórmula del término general
Heptagonales	1, 7, 18, 24, ...			
Octagonales	1, 8, 21, 40, ...			
Nonagonales	1, 9, 24, 46, ...			
Decagonales	1, 10, 27, 52, ...			

f) Dada la sucesión numérica: 3, 7, 13, ...
i) Encuentra la expresión para la sucesión.
ii) Encuentra 25 términos de la sucesión. En ellos, ¿hay más números primos?
iii) Encuentra las fórmulas para obtener los términos generales de las sucesiones que pueden continuar ocurriendo en la expresión de este inciso.
iv) ¿Cuántos términos bastaría tener de una sucesión numérica, para encontrar el término general por el método de diferencias finitas?

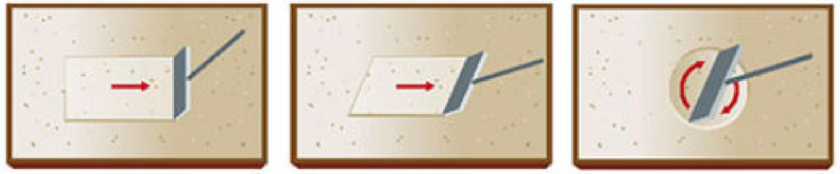
2 Figuras y cuerpos

Regla del producto

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

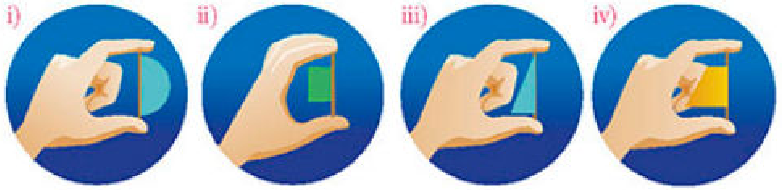
1 Comienza a pensar

1. En equipos, hagan las actividades expuestas a continuación y respondan.
En un recipiente coloquen arena y deslicen una vara delgada sobre esta y te darás cuenta de que, según el barrido que realices, puedes formar distintas figuras.



a) ¿Qué figuras se forman? ______
b) ¿En qué influye el tipo de barrido con la forma obtenida? Descríbanlo:
______

c) Si giran figuras planas dispuestas alrededor de un eje se generarán algunos cuerpos. Para experimentarlo, coloquen algunas figuras de cartón, como se muestra a continuación, de tal manera que cada una pueda girar alrededor de un palillo, como se ejemplifica con el caso del rectángulo verde.



d) En los siguientes recuadros dibuja el cuerpo que se genera al girar la figura tomando como eje de giro al palillo, si conoces el nombre de dicho cuerpo escríbelo:

i) ii) iii) iv)

e) Ahora, anoten el nombre de un objeto que utilicen o hayan utilizado alguna vez, que se parezca o que tenga exactamente la forma del cuerpo que se generó y dibújenlo.

i) ii) iii) iv)

2. Guiados por su profesor, reflexionen acerca de la actividad anterior y comparen sus dibujos y respuestas.
a) ¿Coincidieron en los nombres de los cuerpos? ______
b) ¿Pensaron en objetos similares con dichas formas? ______ ¿Cuáles? ______
______

2 Analicemos juntos

1. En parejas colaborativas analicen la siguiente situación y contesten las preguntas posteriores.

Si alguna vez has comido o visto algún producto enlatado, como por ejemplo atún, recordarás que para poder consumirlo, debemos abrir la lata, lo cual genera una imagen como la de la derecha.

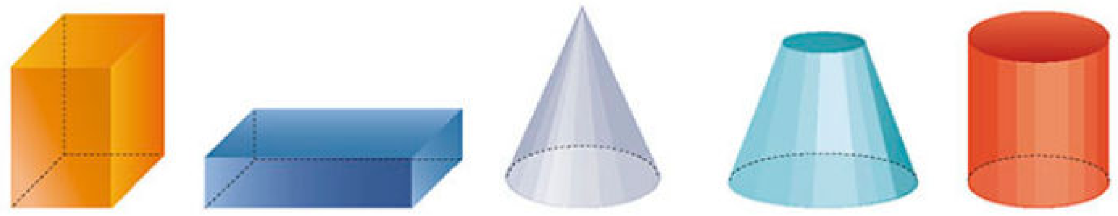
a) Si abriéramos la lata por la parte arriba y por la de abajo, y después quitáramos las dos tapas que resultan de dicha acción. ¿Cómo luciría la parte que queda son las tapas? Dibújenla.

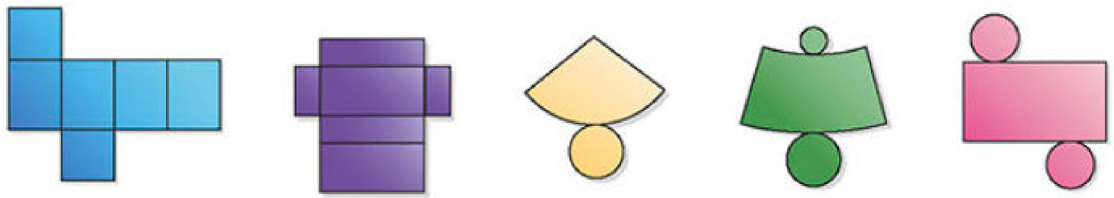
b) Ahora, imaginen que tienen una lámina (pueden usar una hoja de su cuaderno para simularla) y les piden hacer el diseño de las partes con las que, una vez recortadas, sea posible armar una lata como la de la figura anterior. Dibujen su diseño:

c) ¿De qué figuras se compone el diseño? ______
d) Las medidas de dichas figuras son aleatorias o, ¿cómo deben estar relacionadas entre sí para que pueda armarse la lata? ______
______

2. De manera individual, trabaja la siguiente actividad. No olvides preguntar a tu profesor en caso de duda.

En una fábrica de envases de lámina existen los siguientes diseños que se recortan de las hojas de este material para poder armar distintos envases. ¿Qué envase consideras que corresponde a cada diseño? Ten en cuenta que el color de éstos no necesariamente corresponde con los de los envases ya armados.





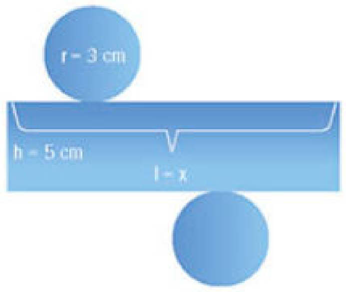
a) En grupo y guiados por su profesor, comparen sus respuestas y discutan sus argumentos. Finalmente, registra tus conclusiones. ____________________
____

¿Adónde llegamos?

1. Reflexiona con la siguiente información y haz lo que se te pide.

a) Una empresa de procesamiento de frutas para néctares desea armar una lata para un nuevo jugo que lanzará al mercado. A partir del plano trazado sobre una lámina; ya se tienen algunas medidas, pero aún falta calcular una de ellas, ¿cuál debe ser el valor de la medida que falta? ____________
____

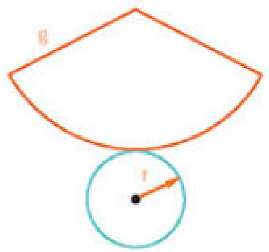
i) ¿Cómo la obtuviste? Desarrolla tu procedimiento:



ii) ¿Cuál es el área total de lámina que se utilizará en el diseño de la lata?
____

iii) Explica cómo lo obtuviste: ____________________
____

b) Como envase de un helado se pretende construir un cono a partir del diseño que se muestra a la derecha.



i) Si sabemos que el valor de g es 8 cm, y el de r es 2 cm, ¿qué otras medidas deben determinarse para formar el armado?
____

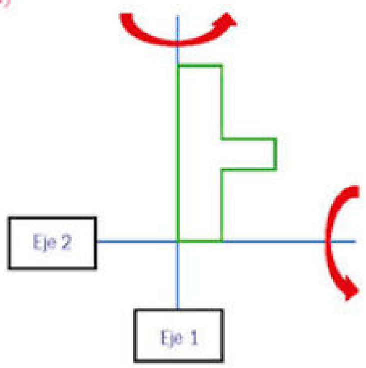
¿Por qué? ____________________________________
____

ii) Determina las medidas que falta por obtener: ____________
____

iii) ¿Cuál es el área total del diseño? __________ ¿Cómo lo determinaste?
____
____

c) Ahora, dibuja en los cuadros de la derecha el cuerpo que se genera por la rotación de cada una de las siguientes figuras, con base en el eje de rotación señalado.

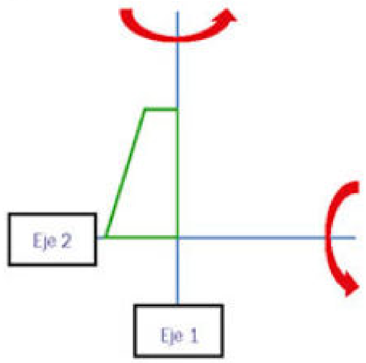
i)



Eje 1

Eje 2

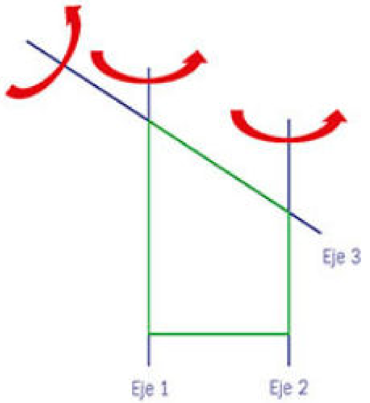
ii)



Eje 1

Eje 2

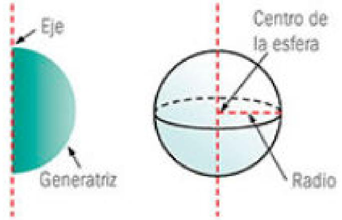
iii)



Eje 1	Eje 2	Eje 3

Algo por aprender

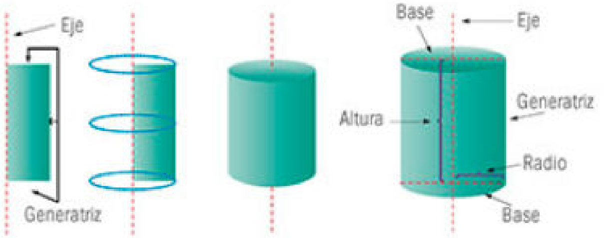
Un cuerpo de revolución es el que se origina al girar una figura plana alrededor de un eje. Las caras de un cuerpo de revolución son curvas. En ellos podemos distinguir el **eje**, que es la recta alrededor de la cual gira la figura plana para generar el cuerpo de revolución, y la **generatriz**, que se refiere a los límites exteriores de la figura plana.



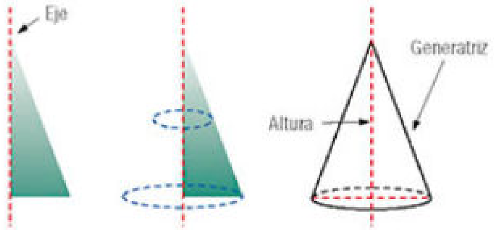
Y entre los cuerpos de revolución destacan la esfera, el cilindro y el cono.

a) Esfera: se genera al girar una semicircunferencia alrededor de un eje, como ejemplifica la figura. En ella, todos los puntos sobre su superficie, están a la misma distancia de su centro. El segmento que une cada punto de la esfera con el centro se denomina radio.

b) Cilindro: tiene dos bases paralelas con forma de círculo y una cara lateral curva. Se genera al girar un rectángulo alrededor de un eje.



c) Cono: tiene una sola base en forma de círculo y una cara lateral curva que finaliza en un punto llamado vértice o cúspide. Esta figura se obtiene girando un triángulo rectángulo alrededor un eje. La generatriz es el segmento que va desde cualquier punto de la circunferencia de la base al vértice.



Si se descompone un cilindro en las partes que lo conforman, se obtiene un rectángulo y dos círculos iguales, los cuales constituyen las bases. A saber:

El **área lateral** es el área de un rectángulo cuya base es igual al perímetro de la circunferencia, $2\pi r$, y cuya altura, h, es la altura del cilindro.

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

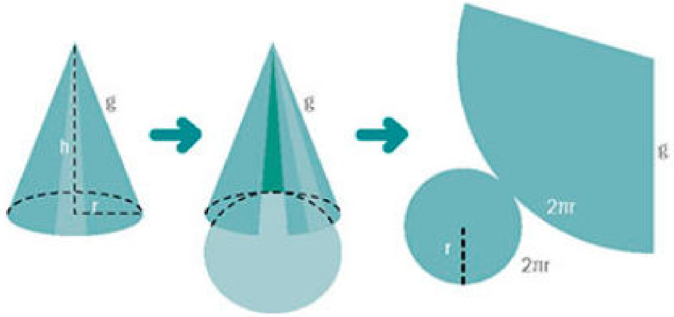
El **área de las bases** es la suma de las áreas de los dos círculos. Como las bases son círculos, cada una tendrá un área igual a:

$$A_B = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Finalmente, el área total de un cilindro es la suma del área lateral más el área de las dos bases:

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

El desarrollo plano de un cono es un sector circular y un círculo:



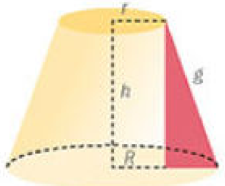
El área lateral es el área de un sector circular de base $2\pi r$ y de altura g:

$$A_{lateral} = \frac{longitud \cdot altura}{2} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} = \pi rg$$

El área de la base es el área de un círculo de radio r, por tanto:

$$A_{cono} = A_{lateral} + A_{base} = \pi rg + \pi r^2$$

Un tronco de cono es el cuerpo de revolución engendrado por un trapecio rectángulo al girar sobre el lado perpendicular a sus bases:



Sector circular
Un sector circular es la porción de círculo limitada por dos radios. Una fórmula para calcularlo es:

$$S = \frac{a}{360°}(r^2)$$

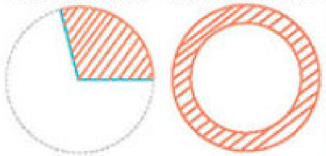
Donde a corresponde al valor del ángulo en grados que abarca el sector circular.

Corona circular
Es la porción de círculo limitada por dos círculos concéntrico. El área de una corona circular es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Donde: R = radio del círculo mayor y r = radio del círculo menor.

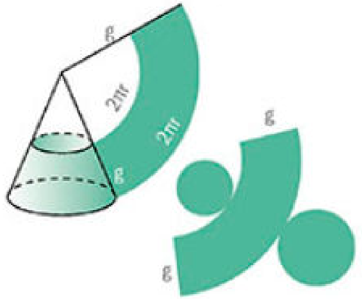
Sector circular Corona circular

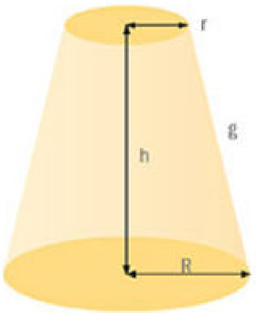


(Tomado de Mancera, E. y e. Basurto, *Matemáticas 1*, *Serie Saberes*, México, Pearson educación, p. 252)

El desarrollo plano de un tronco de cono está compuesto por dos circunferencias de distinto tamaño y un sector de corona circular (definición en página anterior), como el de la siguiente figura.

El área lateral es un sector de corona circular al que podemos considerar como un trapecio curvilíneo; así que al aplicar la fórmula del área del trapecio:





$$A_{lateral} = \frac{(longitud\ base\ mayor \cdot longitud\ base\ menor) \cdot altura}{2}$$

$$A_{lateral} = \frac{(2\pi R + 2\pi r) \cdot g}{2} = \frac{2\pi(R + r) \cdot g}{2} = \pi(R + r) \cdot g$$

Para calcular el área de un tronco de cono necesitaríamos sumar el área de las dos circunferencias con la del sector de corona circular.

$$A_{tronco\ cono} = A_{lateral} + A_{base\ mayor} + A_{base\ menor}$$

$$A_{tronco\ cono} = \pi(R + r) \cdot g + \pi R^2 + \pi r^2$$

Utilizo lo que aprendí

1. Resuelve los siguientes problemas. Al términar, discutan los resultados en grupo.

a) ¿El desarrollo plano de la figura puede formar un cilindro? ________. Explica tu respuesta: ______________________________

i) Si hacemos rotar un rectángulo, ¿se obtiene el mismo cilindro al rotar por la base o por la altura? ______________________________

ii) ¿Existe algún caso en el que sea posible? ______________________________

____

b) Si queremos construir un bote de forma cilíndrica que tenga 9 cm de alto y el radio de la base mida 1.5 cm, ¿cómo lo haríamos? Dibuja su desarrollo plano en tu cuaderno.

c) También en tu cuaderno, traza el desarrollo de un cono con radio en su base de 5 cm y 10 cm de generatriz.

d) Si giramos un triángulo con base de 4 cm y altura de 8 cm, alrededor de una de sus alturas obtenemos un cono. ¿Cuánto mide su generatriz? __________

e) El desarrollo plano de la cara lateral de un cono, ¿puede ser un círculo completo? ________ ¿Por qué? ______________________________

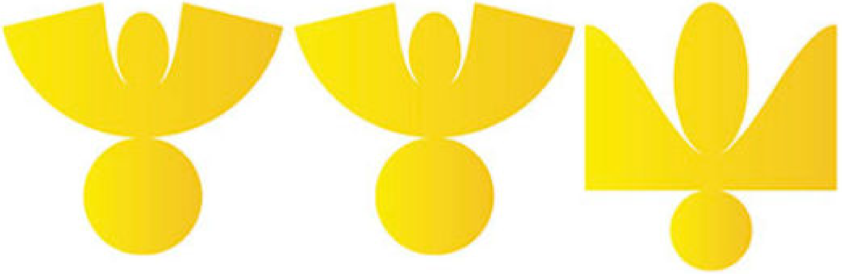
____

f) Al girar un cuarto de círculo por uno de los radios que lo limitan, ¿qué figura obtenemos? ______________ ¿Por qué? ______________________________

____

g) Al girar un círculo alrededor de un eje externo a él, ¿qué figura obtenemos? ______________ Dibújala en tu cuaderno.

h) ¿Cuál de los siguientes desarrollos planos corresponde al siguiente cuerpo?



Explica tu elección: ______________________________

____

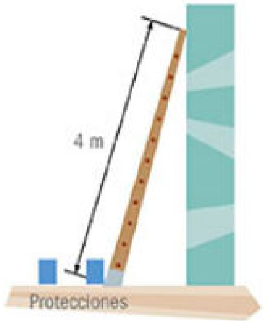
Aprende con tecnología

Para explorar más acerca del tema por medio de otras versiones de los mismos conceptos, observar un tutorial, analizar ejemplos y practicar con algunos ejercicios, consulta las páginas de internet: http://goo.gl/uiWlH y http://goo.gl/ANlTO (consultados el 2 de diciembre de 2016).
Puedes transcribir algunos y solicitar a tu profesor que se resuelvan en clase, para obtener retroalimentación.

3 Medida

Pendientes y triángulos

Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.



1 Comienza a pensar

1. En equipos revisen la siguiente situación y respondan. Después, guiados por su profesor, debatan sus resultados.

El carpintero Francisco tiene que colocar tornillos y hacer las respectivas perforaciones en una pared para tal fin. Para ello dispone de una escalera portátil con un larguero (ejes verticales donde están dispuestos los peldaños) de 4 m. Por el tipo de tarea y el personal disponible, se requiere dar instrucciones precisas para instalar protecciones en el piso, de tal forma que la escalera no resbale y con la parte alta de ella puedan alcanzarse alturas de 1.8 m, 2.3 m, 2.7 m, 3.2 m, 3.5 m y 3.8 m en una pared.

a) ¿A qué distancia de la pared deben ubicarse las protecciones para la parte inferior de la escalera? Considera que el piso y la pared son perpendiculares, como se muestra en la imagen.
Escribe tus conclusiones:
____
____

b) ¿Qué relación tendría el ángulo que forma la escalera con el piso y la altura que se desea alcanzar?
____
____

c) Con palillos, popotes o palitos de madera para paleta, hagan un modelo a escala que les permita analizar la relación entre las alturas de la pared que se alcanzaría con la parte superior de la escalera, la distancia a la que debe colocarse la parte inferior de ésta y el ángulo que forma la escalera con el piso.

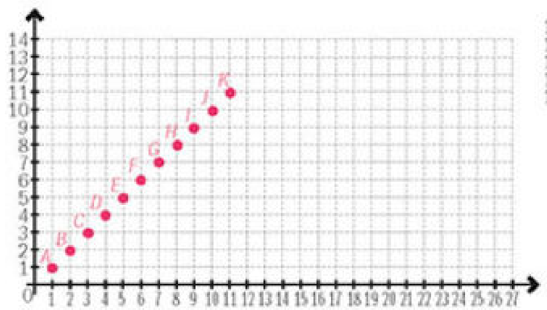
i) En su modelo, ¿qué relación hay entre esas tres medidas? ____________
____

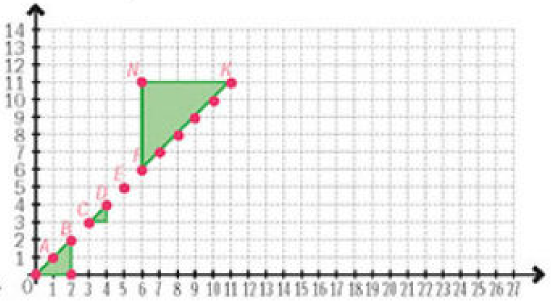
d) Comparen sus resultados con los de otros equipos y observen si la relación entre dichas medidas varía de acuerdo con el modelo o la escala empleada. Anoten sus conclusiones:
____
____

2 Analicemos juntos

1. Analiza el siguiente caso y registra tus resultados. No olvides preguntar a tu profesor si tienes alguna duda.

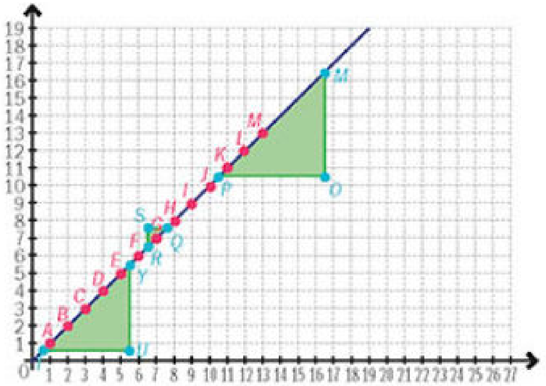
a) Analiza las siguientes disposiciones de puntos de acuerdo con la cuadrícula y los ejes perpendiculares. Luego considera las rectas que debes trazar para pasar por todos los puntos indicados y determina cuál es la relación entre los triángulos rectángulos que traces, utilizando los puntos dados como hipotenusa. Observa también que los catetos sean paralelos a los ejes.



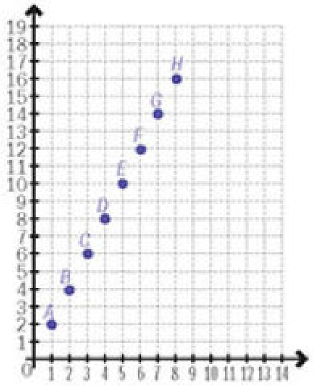


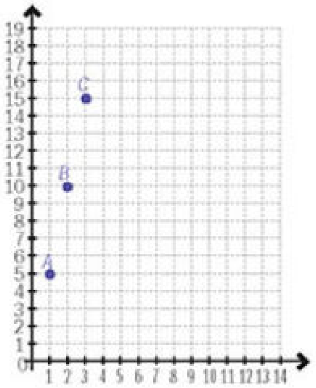
b) Ahora traza la recta que pasa por los puntos dados y analiza la relación entre los triángulos rectángulos con catetos paralelos a la recta, y que los extremos de la hipotenusa sean puntos cualesquiera de la recta.

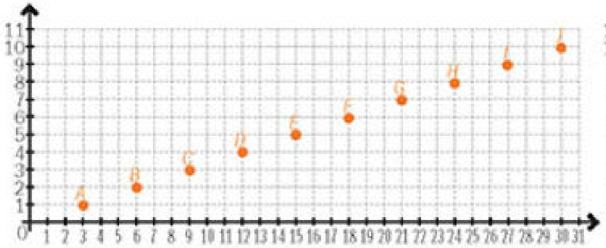
i) ¿Qué ángulo formará una recta así con el eje horizontal? ____________________

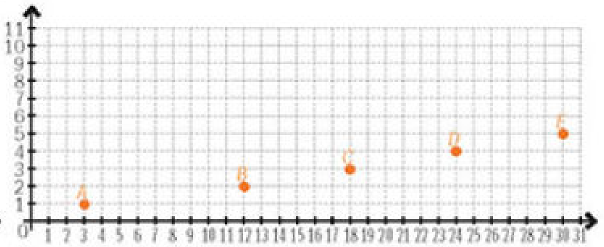


c) Considera otras configuraciones de puntos y analiza la relación entre el ángulo que formaría la recta que pasa por ellos y los cocientes obtenidos de las medidas de los catetos de triángulos rectángulos, que tengan como extremos de la hipotenusa a dos de los puntos dados, siendo sus catetos paralelos a los ejes.









i) Anota tus conclusiones. ______________________________

____

d) En cada gráfica, ¿cómo son los triángulos que puedes trazar con las condiciones dadas? Antes de responder, considera que dos de los puntos son los extremos de la hipotenusa y los catetos son paralelos a los ejes.

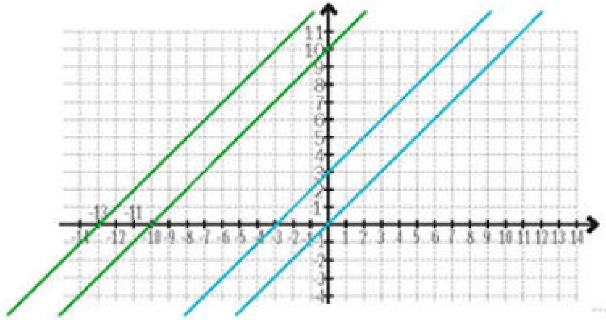
____

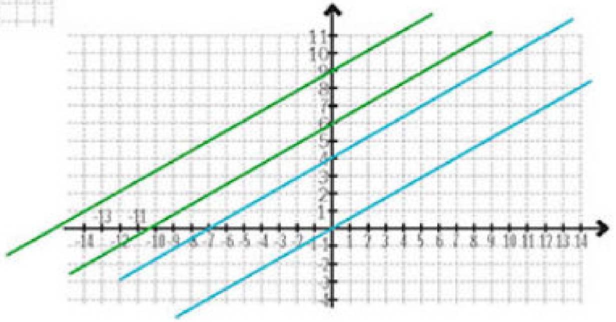
____

3 ¿Adónde llegamos?

1. En parejas, lean el siguiente desarrollo; coméntenlo y respondan lo solicitado.

a) En cada una de las siguientes gráficas se presenta una recta que pasa por el origen de coordenadas y se indica la medida del ángulo que forma la recta con el eje horizontal.





b) En cada gráfica, indique el valor del ángulo que forman las rectas paralelas con el eje horizontal y expliquen el porqué de la medida que proponen; anótenlo.

____

____

c) En cada gráfica, si trazan triángulos rectángulos que tienen los extremos de la hipotenusa en puntos de la recta y catetos paralelos a los ejes, ¿qué relación hay entre los catetos de un triángulo respecto a otro, es decir, qué valor tendrán los cocientes de la longitud del cateto vertical entre la longitud del cateto horizontal? Utilicen una hoja tamaño oficio para representarlo y anoten sus conclusiones a continuación.

____

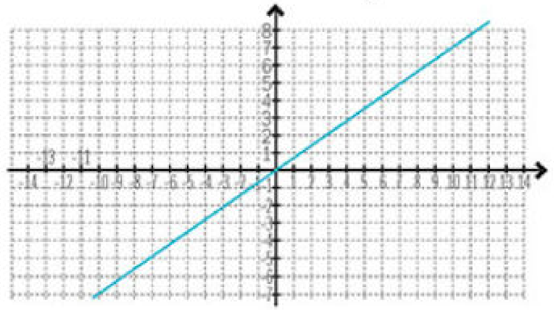
____

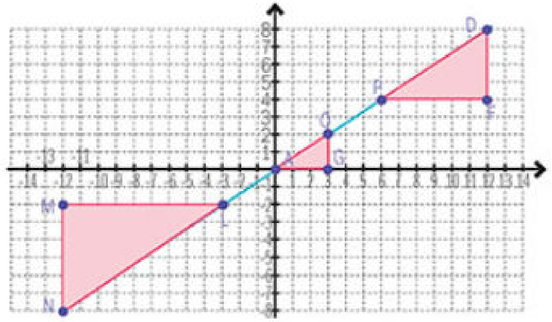
4 Algo por aprender

1. En grupo y guiados por su profesor, reflexionen la información después cada quien responda de forma individual las preguntas.

El coeficiente de x en la expresión de una función lineal, la cual tiene como gráfica una recta, se relaciona con el cociente de las longitudes de los catetos verticales entre las longitudes de los catetos horizontales. La siguiente gráfica corresponde a la recta:

$$y = \frac{2}{3}x \quad \text{o} \quad y = 0.66x$$





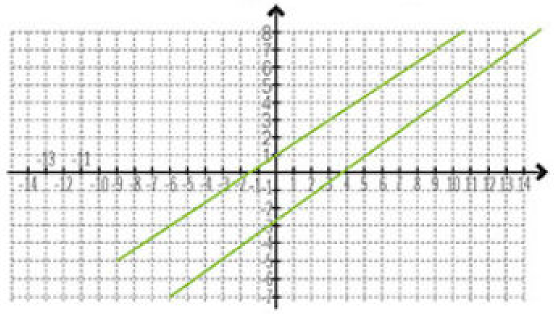
a) Calcula el cociente de las longitudes de los catetos verticales entre las longitudes de los catetos horizontales para cada triángulo de la figura. Después traza otros tres triángulos rectángulos y repite el cálculo inicial con cada uno de estos. ¿Qué resultados obtienes? Registra tus operaciones y redacta tus conclusiones.

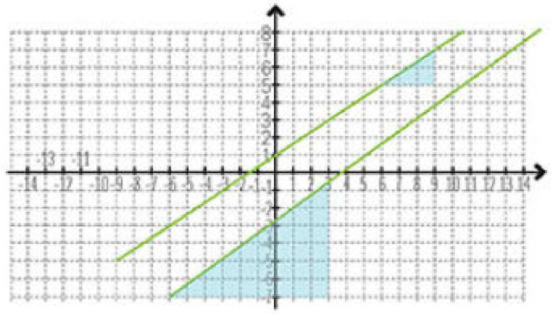
____

____

____

b) Si llevas a cabo el trazado de triángulos rectángulos como los anteriores, en cada una de las siguientes rectas paralelas a una determinada recta:





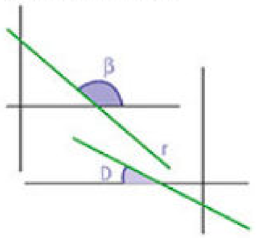
i) ¿Cuál es el resultado del cociente de las longitudes de los catetos verticales entre las longitudes de los catetos horizontales? ______________

c) Traza otros triángulos; observa lo que obtienes con cocientes similares y anota tus conclusiones: ______________________________

____

Glosario

Pendiente de la recta.
Es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas. Cuando hay rectas paralelas, ocurre en cada una de éstas.

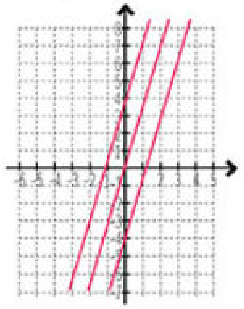


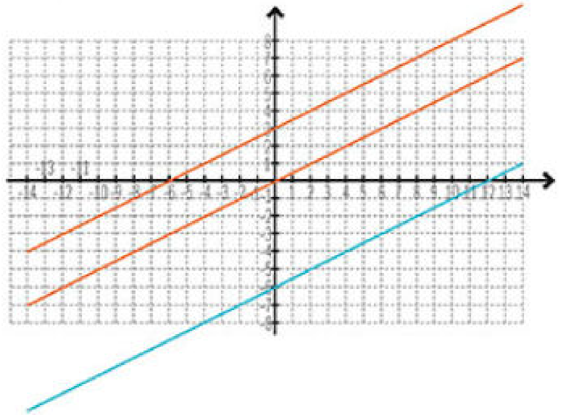
Y cuando se presentan rectas perpendiculares, las pendientes son **recíprocas** y **de signo contrario**.

d) ¿Qué ecuaciones tiene cada una de las rectas? Puedes investigar en tu libro de segundo grado para recapitular más de este tema. ___________________

____

e) Comprueba en los siguientes casos que los coeficientes obtenidos de triángulos rectángulos respecto a los extremos de la hipotenusa en la recta y catetos paralelos a los ejes.





f) De acuerdo con las gráficas anteriores, escribe las ecuaciones de cada una de las rectas y explica cómo las obtuviste. Luego compara tu respuesta con la de tu compañero más cercano.

Recta 1	Recta 2

g) En cada gráfica, ¿los triángulos trazados serán semejantes? ________ ¿Qué criterio de semejanza podría utilizarse para responder lo anterior? ________

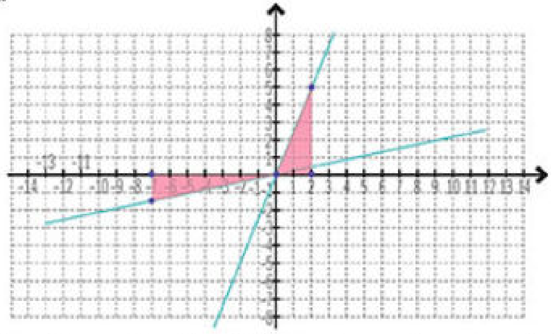
____

h) Finalmente, discutan en clase el contenido de esta sección y resume brevemente y con tus palabras, los acuerdos que alcanzaron en grupo.

Utilizo lo que aprendí

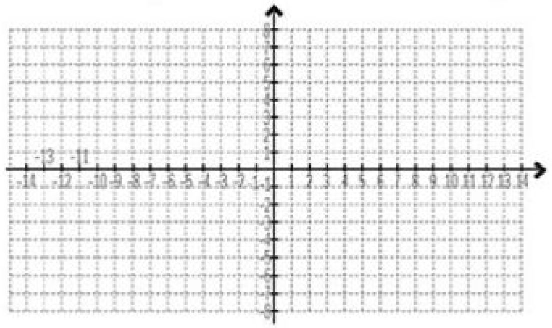
1. En parejas colaborativas copien los siguientes ejercicios en hojas aparte y resuélvanlos.

a) Usando los triángulos de la siguiente gráfica, encuentra la ecuación de la recta.



b) Encuentren las coordenadas de los puntos que tienen abscisa 5, 10, 15, 30 y 45, además de que pertenecen a la recta $y = \frac{3}{5}x - 1$. Solo utilicen triángulos semejantes sin tabular.

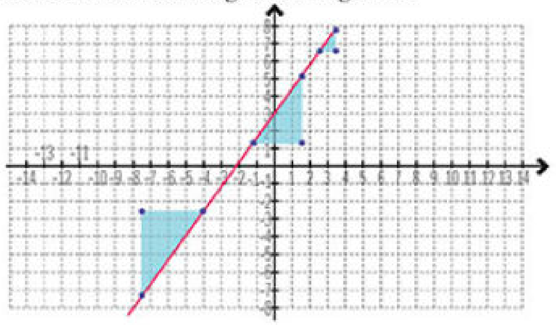
c) Grafiquen dos rectas perpendiculares que se corten en el punto (3, 5), determinen sus ecuaciones y describan cuántas soluciones hay.



d) Sin tabular, traza las rectas cuyas ecuaciones son:

i) $y = 6x - 1$ ii) $y = \frac{3}{4}x + 3$

e) ¿Cuál es el valor del cociente de la longitud del cateto vertical entre la longitud del horizontal de los triángulos en la gráfica?



Aprende con tecnología

Para ver una animación que muestra cómo varían la pendiente y la inclinación de una la recta respecto al eje de las abscisas visita el sitio de internet:
http://goo.gl/zgP0C

También puedes utilizar un recurso elaborado con el programa Geogebra que muestra la relación de triángulos rectángulos con la hipotenusa, en puntos de una recta dispuesta sobre una gráfica, disponible en el sitio web:
http://goo.gl/v2AX8

Consultados el 2 de diciembre de 2016.

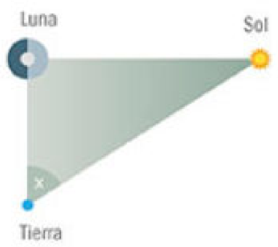
Aprende de los errores

Si un amigo te dice que dos rectas paralelas pueden tener pendientes recíprocas y de signo contrario, ¿qué le dirías respecto a la validez de su afirmación?

Relaciones de lados en triángulos rectángulos acutángulos

Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

1 Comienza a pensar



1. En parejas, lean y comenten el caso a continuación y respondan lo solicitado.

Aristarco de Samos (310-230, a.n.e.) es considerado como el primero que planteó y resolvió problemas astronómicos por medio de las matemáticas; por ejemplo, encontró una relación entre las distancias de la Tierra, el Sol y la Luna entre sí.

Se dio cuenta de que cuando la mitad de la Luna está iluminada, el triángulo formado por ésta, el Sol y la Tierra, era aproximadamente de 87°.

a) ¿Cómo podría utilizarse esta información para encontrar la relación entre las distancias del planeta, el llamado astro rey y la Luna? Argumenten su respuesta y compárenla con la de otra pareja de compañeros:

____

____

b) Aristarco afirmó que la distancia de la Tierra al Sol era igual a 19 veces la distancia de la Tierra a la Luna. ¿Cómo creen que pudo haber obtenido está relación? Reflexionen y anótenlo:

____

____

Hoy sabemos que ese resultado no es cierto, pues dicha relación es de aproximadamente unas 400 veces en vez de 19, como creyó Aristarco: $d(SL) = 400\, d(TL)$. Sin embargo, el método de Aristarco tuvo muchas aplicaciones interesantes.

2 Analicemos juntos

1. Sigue el caso y resuelve las preguntas.

Considera un triángulo rectángulo del cual sólo conoces uno de sus ángulos agudos. ¿Cómo determinarías la relación entre sus lados? ____________________

____

Si construyes un triángulo como el que se muestra a la derecha:

¿De qué manera puede ayudarte el conocerlo?

____

____

____

Y si construyes este otro triángulo:

¿Cómo podrías utilizar la información que se muestra para resolver la pregunta anterior?

____

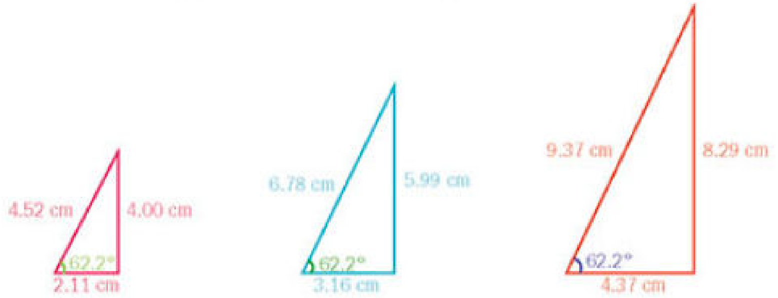
____

____

3 ¿Adónde llegamos?

1. En forma grupal, comenten la siguiente información y resuelvan guiados por su profesor.

a) Consideren los siguientes triángulos rectángulos:



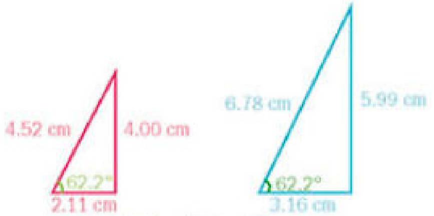
i) ¿Son semejantes? ________ ¿Por qué? Es decir, ¿con base en cuál criterio de congruencia?

____

____

b) Si se tienen en cuenta las relaciones de proporcionalidad de lados entre los triángulos rosa y azul:

i) ¿Son semejantes? ________ ¿Con base en cuál criterio de semejanza?

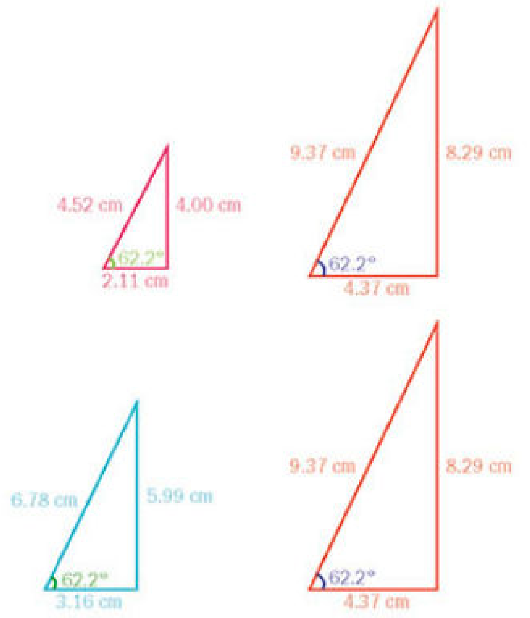


____

____

ii) Si son semejantes escribe la relación de proporcionalidad entre los lados:

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$



c) Ahora analicen las relaciones de proporcionalidad de lados entre los siguientes triángulos:

i) ¿Puede establecerse una relación de proporcionalidad entre sus lados? ______________
De ser así, escríbanla:

$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$

d) Reflexionen: ¿existe alguna relación de proporcionalidad entre los lados del triángulo azul y los del rojo?
Si es así, escríbanla:

$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$

e) Si calculas un cociente entre los lados de uno de los triángulos, ¿tendrán el mismo valor si se calcula el cociente entre los lados de alguno de los otros triángulos? __________ ¿Por qué? ______________________________
____

2. Por tu cuenta, analiza y resuelve lo siguiente:

a) Calcula los siguientes cocientes en los tres triángulos y llena la tabla posterior con las operaciones correspondientes.

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}},\ \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}\ \text{y}\ \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$			
$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$			
$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$			

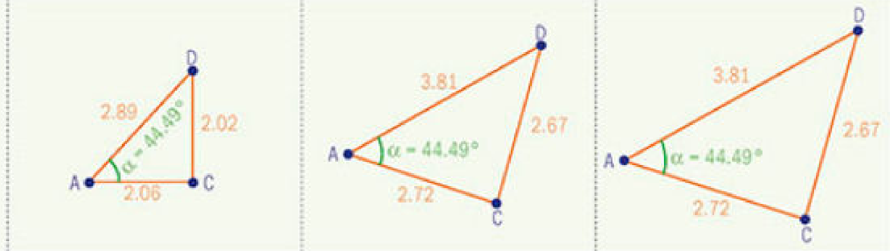
b) De los resultados de la tabla, ¿qué observas? Registra tus conclusiones y coméntenlo en grupo: ______________________________
____

Algo por aprender

En general, cuando trabajas con triángulos rectángulos semejantes los cocientes de las medidas de sus lados **homólogos**, son iguales, independientemente en que triángulo se calculen.

1. Guiados por el profesor, exploren y reflexionen en grupo el siguiente desarrollo.

a) Establecidos los catetos opuesto y adyacente dado un ángulo agudo, completa la tabla.



$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$			
$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$			
$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$			

Es decir, en cualquier triángulo rectángulo, dados los cocientes:

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}},\ \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}\ \text{y}\ \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

se dice que son constantes; es decir, si se calculan en cualquier otro triángulo semejante darían el mismo resultado.

b) Reunidos en equipos, cada uno de los integrantes trace un triángulo semejante a los triángulos trazados por otros compañeros. Todos los triángulos deben tener medidas en los lados diferentes al resto. Calculen ahora para cada triángulo los siguientes cocientes:

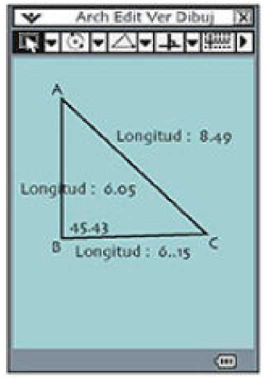
$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}},\ \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}\ \text{y}\ \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

i) Determinen el cateto que será el opuesto (vertical), y también el que considerarán adyacente (horizontal), considerando que dichas posiciones deben ser correspondientes en todos los triángulos.

ii) Comprueba, comparando tus resultados con los de tus compañeros, que los cocientes tienen el mismo valor, independientemente del triángulo rectángulo en el que se calculen, siempre y cuando sean congruentes o semejantes.

Aprende con tecnología

Para analizar las razones entre los lados de un triángulo rectángulo puedes descargar de internet el programa Geogebra y practicar con él para reforzar tu conocimiento:



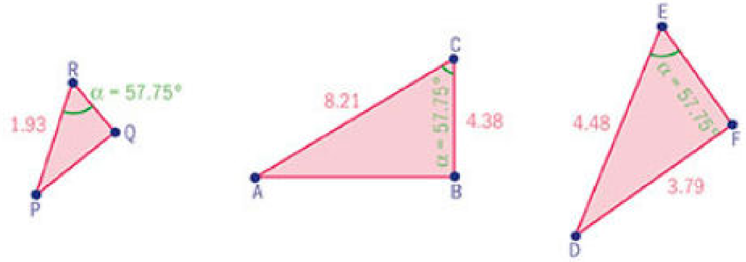
Además, si quieres conocer un poco de la historia de este teorema y repasar con algunos ejemplos, haz una búsqueda en internet utilizando palabras clave como "razones trigonométricas", "historia teorema Pitágoras" o cualquier otra que tú decidas.

5 Utilizo lo que aprendí

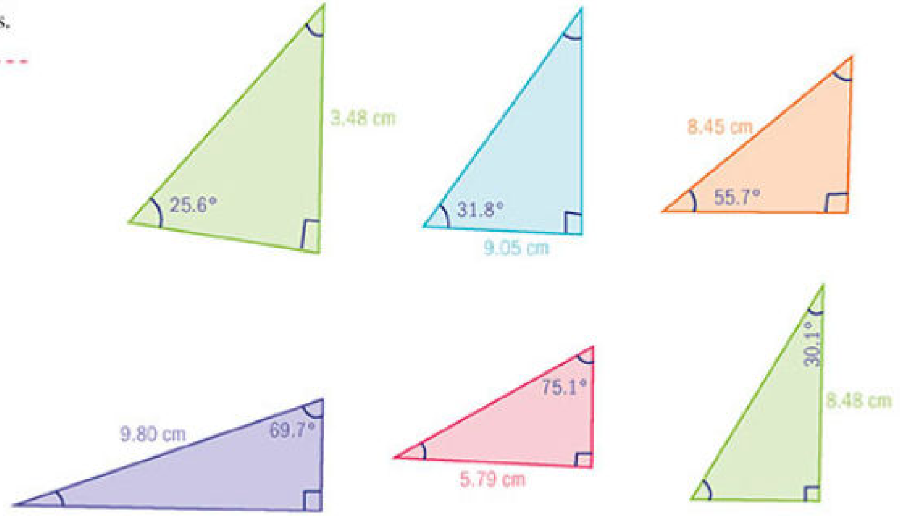
1. Resuelve los ejercicios y no olvides registrar y conservar las operaciones que hagas, recuperarlas te será útil en tus evaluaciones posteriores.

   a) Si en un triángulo rectángulo, la razón (cociente) entre los catetos es igual a 1, ¿qué tipo de triángulo es, además de ser triángulo rectángulo?
      i) ¿Cuánto miden los lados del triángulo si uno de los catetos mide 4 cm?
      ii) Con las medidas dadas hasta ahora, ¿pueden medirse los ángulos agudos del triángulo? ¿Cómo? Si es posible, guiado por el profesor, encuentra las medidas.

   b) Calcula las medidas de lados y ángulos de los siguientes triángulos rectángulos, según los datos que muestran.



   c) Calcula la medida de los ángulos y longitudes de los lados faltantes. Si es necesario traza un triángulo semejante con los datos conocidos.



   d) Calcula la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 2 cm.

   e) Obtén la longitud del lado de un triángulo equilátero que tiene como altura:

      i) 12 cm ii) 4 cm iii) 8 m

2. En parejas, resuelvan los planteamientos.

   a) Dado el siguiente triángulo:

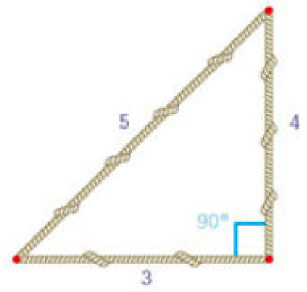
      i) Dibuja otro triángulo semejante en el cual el cateto *PQ* mide 17 cm.
      ii) Dibuja otro triángulo semejante en el cual el cateto *PR* mide 10 cm.
      iii) Dibuja otro triángulo semejante en el cual la hipotenusa mide 11 cm.

   b) ¿Habrá un triángulo rectángulo en el cual las razones $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ y $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ sean igual a 1? ¿Cómo sería?

   c) ¿Cuáles son los valores de las razones $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ y $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ en el triángulo egipcio, de lados 3, 4, y 5? Este es utilizado para medir ángulos rectos.

   d) ¿Habrá otro triángulo rectángulo como el triángulo egipcio, en el cual un lado mida un número entero, otro el consecutivo de dicho número y el tercer lado sea el consecutivo del anterior?

      i) Si lo hubiera, ¿cuál sería la expresión correspondiente para las razones $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ y $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$?



Aprende de los errores

Si un compañero de clase te dijera que como en un triángulo equilátero las razones son iguales, tras haber analizado esta lección como tú, entonces un triángulo equilátero puede ser un triángulo rectángulo, ¿qué le dirías respecto?

Y si otro compañero afirma que hay triángulos rectángulos con ángulos obtusos, ¿qué le responderías?

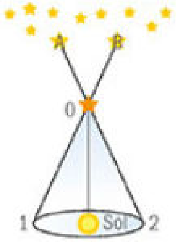
Razones trigonométricas

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

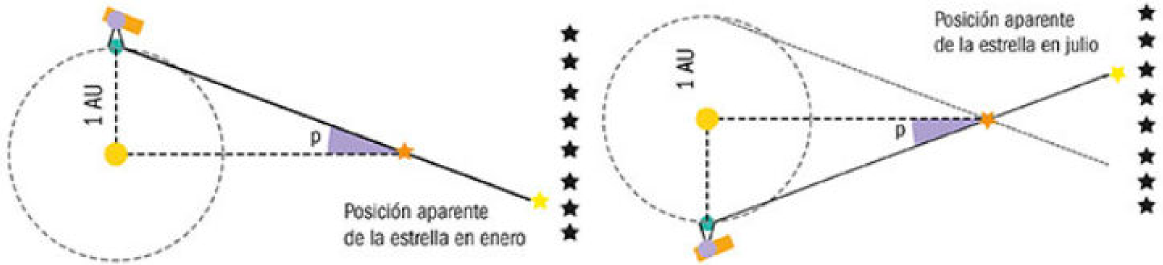
1 Comienza a pensar

1. En lectura grupal guiada por el profesor, analiza el siguiente caso y resuélvelo.

   a) Imagina que se quiere conocer la distancia de la Tierra a una estrella visible.



Supongamos que en un observatorio astronómico hacen observaciones sobre la posición y distancia de las estrellas respecto de la Tierra en dos periodos diferentes, con seis meses de diferencia específicamente en enero y julio. La distancia entre esas posiciones resultó ser dos veces la distancia de la Tierra al Sol, es decir, dos unidades astronómicas. Cada unidad astronómica (UA) equivale a 150 millones de kilómetros.



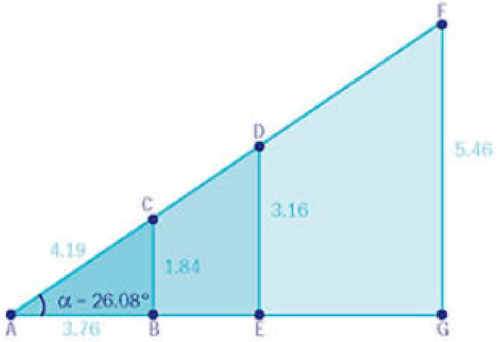
En enero miramos una estrella y en julio lo hacemos de nuevo. Es decir, la Tierra ocupa una posición respecto al Sol en enero y en julio ocupa la simétrica respecto a la línea que une al Sol con la estrella. La observación se hace con un dispositivo que indica el ángulo respecto a la perpendicular hacia la Tierra. A esta técnica, usada desde hace cientos de años, se le denomina **paralaje trigonométrico**.

2 Analicemos juntos

1. En parejas, analicen y respondan.

   a) En la lección anterior estudiaron que la relación entre los lados de triángulos rectángulos semejantes permanece constante. Ahora observen detenidamente la figura de la siguiente página.

i) Conociendo los datos del ΔABC, pueden calcularse los correspondientes a los triángulos ΔAED y ΔAGF. Calculen entonces las medidas de los lados y los ángulos de ΔAED y regístrenlas a continuación.

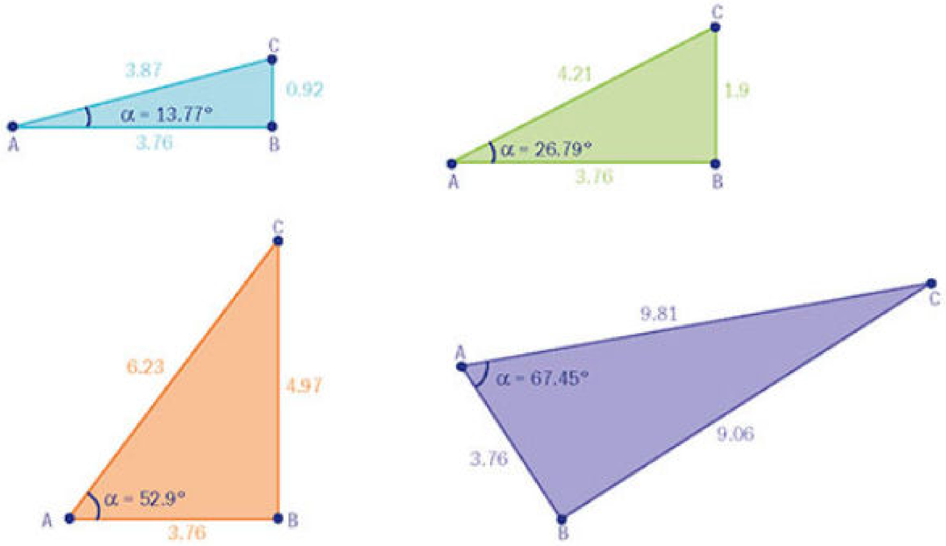


ii) Ahora calculen la medida de los lados y los ángulos de ΔAGF; registren sus operaciones.

3 ¿Adónde llegamos?

1. Resuelve los planteamientos.

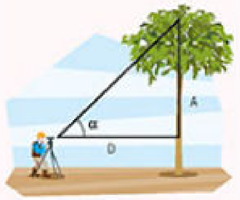
   a) Analiza el valor de la razón entre las longitudes de los lados de triángulos rectángulos de acuerdo con los ángulos agudos de triángulos rectángulos. Registra los resultados en tu cuaderno.



   b) Calcula las razones entre los lados de cada uno de los triángulos y compara los resultados de las razones obtenidas. Escribe tus conclusiones en tu cuaderno.

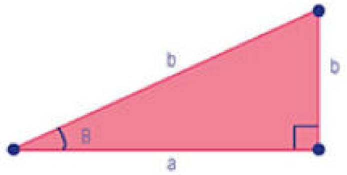
Conexión matemática

Varios problemas que pueden resolverse por semejanza de triángulos tienen la opción de resolverse por trigonometría, simplificando las operaciones por realizar y las ecuaciones por plantear.

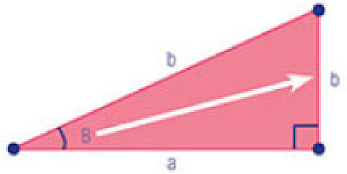


Algo por aprender

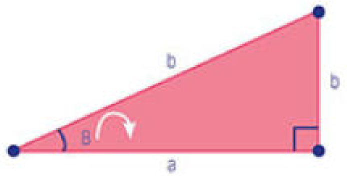
En la lección anterior se utilizaron las denominaciones **cateto adyacente** (horizontal) y **cateto opuesto** (vertical), respecto al ángulo recto de un triángulo rectángulo; sin embargo, existe otra forma más precisa de llamarlos a partir de un triángulo cualquiera:



Supóngase que las longitudes de los lados son *a*, *b* y *c*. Si se elige uno de los ángulos agudos (llamémosle *B*), cada uno de los catetos guarda una relación con *B*. Y hay uno de ellos que es el **cateto opuesto al ángulo**; usa la letra *b*.



El otro cateto es lado del ángulo; es decir, está adjunto a éste y se le denomina **cateto adyacente al ángulo**; se ha indicado con la letra *a*.



Por tanto, se define el **seno del ángulo *B*** como la razón del cateto opuesto al ángulo *B* entre la hipotenusa. Lo cual se representa con símbolos de la siguiente manera:

$$Sen\ B = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } B}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

Se define el **coseno del ángulo *B*** como la razón del cateto adyacente al ángulo *B* entre la hipotenusa. Lo cual se expresa en símbolos como:

$$Cos\ B = \frac{\text{cateto adyacente al ángulo } B}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

Se define la **tangente del ángulo *B*** como la razón del cateto opuesto al ángulo *B* entre el cateto adyacente al ángulo *B*. Lo cual se expresa así:

$$Tan\ B = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } B}{\text{cateto adyacente al ángulo } B} = \frac{b}{a}$$

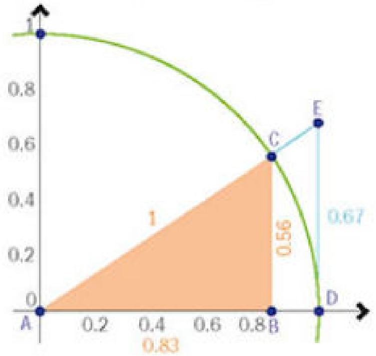
Al **seno**, **coseno** y **tangente** se les denomina **razones trigonométricas**.

La palabra **seno** tiene origen en un tratado de astronomía india titulado *Paitāmahasiddhānta*, el cual contiene una tabla de razones denominada *jyā-ardha*, la cual no era otra cosa que medias cuerdas de una circunferencia. Dichos valores se empleaban en cálculos astronómicos. El término en cuestión aparece de nuevo en la magna obra del matemático hindú Āryabhata, la cual se tituló *Āryabhatiya*, pero se abreviaba *jyā* o *jivā*.

Los árabes tradujeron esa denominación como *jiba*, pero como en el árabe no se usan vocales, el término apareció en los textos como *jb*. Posteriormente se hizo una mala interpretación del término, resultando *jaib*, que se traduce "pecho" o "seno", así los traductores latinos la adoptaron como *sinus*, que significa **seno**.

La palabra **coseno** fue introducida por el matemático inglés Edmund Gunter –también especialista en trigonometría y cálculo logarítmico, que viviera entre finales del siglo XVI y principios del XVII– y se refiere al seno del ángulo complementario, ¿por qué?

La **tangente** significa "que toca la línea", lo cual se ilustra en lo que se conoce como el círculo trigonométrico, un círculo de radio 1 a partir del cual pueden calcularse los valores del seno, coseno y tangente de varios ángulos. Puede representarse en un círculo de radio 1 y analizando algunos triángulos rectángulos como el de la figura siguiente:

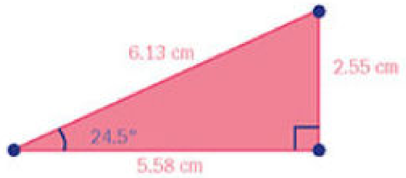


1. Con tus compañeros y en sesión guiada por el profesor, lean, comenten y resuelvan.

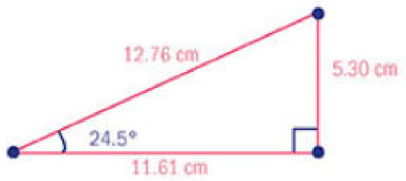
   a) Analicen la figura para resaltar que las igualdades que se muestran son correctas:

   Sen 34.020 = 0.56 *Cos* 34.020 = 0.83 *Sen* 55.980 Tan 34.020 = 0.67

   Para calcular razones trigonométricas de los ángulos es necesario tener construidos triángulos y conocer sus medidas.



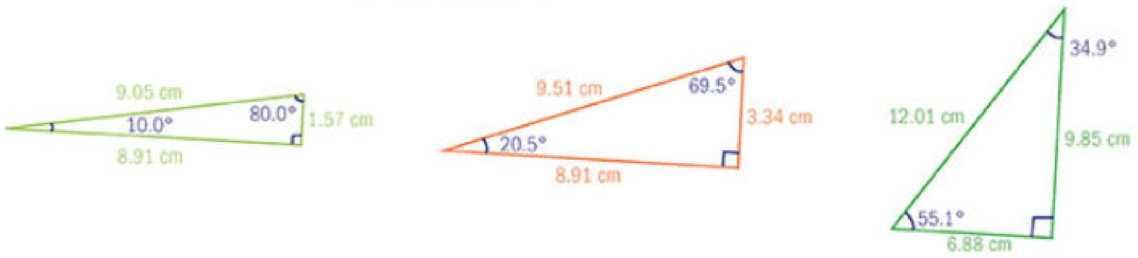
No importa el triángulo que se elija, las razones trigonométricas para un ángulo determinado tendrán siempre el mismo valor. ¿Por qué?



5 Utilizo lo que aprendí

1. Analiza y resuelve en hojas aparte o en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

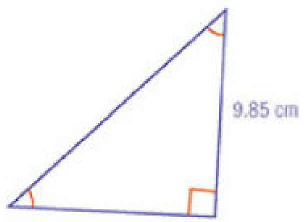
a) Dados los siguientes triángulos, encuentra las razones correspondientes a los ángulos agudos.



Aprende de los errores

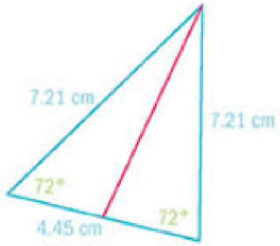
Si un compañero te dice que la tangente de un ángulo es igual a la tangente de su complemento, ¿qué le indicarías sobre la validez de su información?

b) Utiliza un triángulo rectángulo isósceles para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 45°.



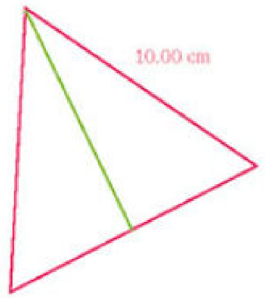
i) ¿Cuál es el valor para la longitud del lado que simplifica los cálculos?
ii) ¿Qué relación hay entre el *Sen* 45° y el *Cos* 45°?

c) Por medio de un triángulo isósceles calcula las razones trigonométricas de los ángulos cuyos valores son 72° y 18°.



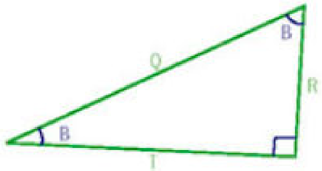
d) Utiliza un triángulo equilátero para calcular las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°.

i) ¿Cuál es el valor para la longitud del lado que simplifica los cálculos?
ii) ¿Qué relación hay entre el *Sen* 30° y el *Cos* 60°?
iii) ¿Qué relación hay entre el *Sen* 60° y el *Cos* 30°?
iv) ¿Qué relación hay entre el *Tan* 30° y el *Tan* 60°?



e) ¿Qué relación debe haber entre los lados del siguiente triángulo para que se cumplan las igualdades de los incisos?

i) $Sen\ \alpha = Sen\ \beta$
ii) $Sen\ \alpha = Sen\ 2\beta$
iii) $Tan\ \alpha = Cos\ \beta$
iv) $Cos\ \alpha = Sen\ \beta$
v) $Tan\ \alpha = Tan\ \beta$



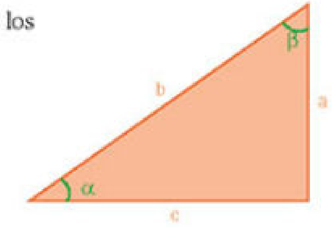
2. En parejas colaborativas resuelvan lo que se solicita.

a) Intenten encontrar las longitudes de los lados de los triángulos descritos a continuación.
   i) La tangente de un ángulo es 0.5 y el cateto adyacente a dicho ángulo tiene 3 unidades más de longitud que el cateto opuesto al mismo ángulo.
   ii) El seno de un ángulo es 0.33 y el cateto opuesto a dicho ángulo es igual a la hipotenusa.
   iii) El coseno de un ángulo es igual a la tangente, la medida del lado adyacente es la cuarta parte de la del cateto opuesto al mismo ángulo y la hipotenusa mide 20 cm.
   iv) Dadas las siguientes razones trigonométricas, indica qué cateto sería el mayor si dibujaras un triángulo que tuviera los ángulos de referencia.
   - *Sen* 35° = 0.57 y *Sen* 55° = 0.82
   - *Cos* 44° = 0.72 y *Cos* 46° = 0.69
   v) ¿El cateto de menor longitud siempre es el cateto opuesto del ángulo con menor medida?

b) Sin usar el teorema de Pitágoras, calculen la longitud de las diagonales de:
   i) Un cuadrado de lado 37 cm ii) Un rectángulo con lados de 12 cm y 17 cm

c) Encuentra las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de los triángulos rectángulos que tienen las siguientes medidas:

i) a = 5 m y b = 12 m
ii) c = 5m y α = 36.87°
iii) b = 160.5 cm y c = 176 cm
iv) b = 102.4 cm y β = 53.13°
v) b = 6 m y β = 49°
vi) α = 37.4° y c = 10 m
vii) c = 13 m y a = 5 m
viii) a = 122.4 cm y b = 130 cm



4 Proporcionalidad y funciones

Regla del producto

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

1 Comienza a pensar

1. Analiza el problema y después contesta las preguntas.
   a) En un laboratorio se desea registrar la distancia que recorre un deportista en un tiempo determinado; en una caminadora fija, le piden que mantenga un ritmo constante en su forma de correr. La siguiente tabla muestra algunos valores tomados en momentos específicos de la prueba.

Distancia (m)	50	75	100	120	140	160	170	200	214		255	270	300
Tiempo (minutos)	1					3.2		4		4.6			6

   i) De 0 a 50 m, ¿qué distancia recorrió?______ ¿En cuánto tiempo?______
   ii) De 50 a 160 m, ¿qué distancia recorrió?______ ¿En cuánto tiempo?______
   iii) De 160 a 300 m, ¿qué distancia recorrió?______ ¿En cuánto tiempo?______

   Como recordarás, la **rapidez** es la razón entre la distancia que recorre un móvil y el tiempo que tarda en hacerlo, establecida por la expresión $v = \frac{d}{t}$.

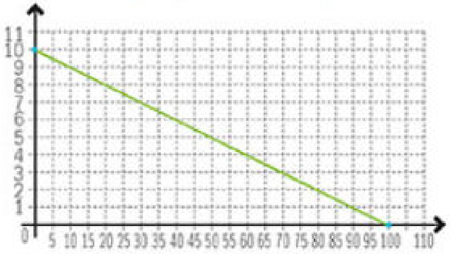
   b) Considerando las distancias y tiempos que se determinaron en los incisos anteriores determina la rapidez del corredor en cada caso:

   i) $v = — =$ ii) $v = — =$ iii) $v = — =$

   iv) ¿Cómo son entre sí los valores de la rapidez en cada caso? __________
   v) ¿Cuál fue la rapidez promedio del corredor en el recorrido de 300 m? ___
   vi) Con base en los distintos valores de la rapidez que obtuviste y en la relación entre ellos, ¿puedes completar los datos que faltan en la tabla? ______ ¿Cómo lo harías? ______________________

2 Analicemos juntos

1. Ahora en parejas, comenten y resuelvan las situaciones.

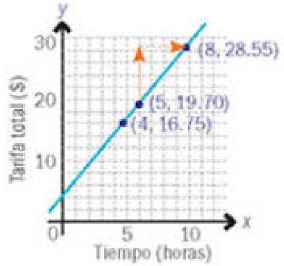


   a) La gráfica muestra de manera estimada y en promedio, cómo cambia el diámetro de la pupila de una persona al paso de los años.

   Analicen y contesten:

   i) De 0 a 20 años, ¿cuánto se reduce el diámetro de la pupila de una persona? ______________
   ii) Cada 20 años, ¿la reducción en mm de la pupila es la misma?________
   iii) ¿Cómo determinarías la reducción del diámetro de la pupila de una persona por año?______________

   b) Por el servicio de internet de alta velocidad, Héctor paga una cantidad fija mensualmente más una tarifa por hora. La siguiente gráfica muestra los datos de cuánto pagó en un cierto mes.



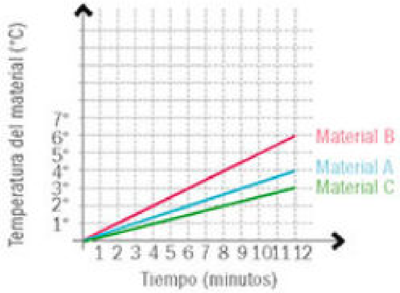
   i) ¿Cuál es el cambio en horas de 5 a 8 horas? __________
   ii) En ese intervalo de tiempo, ¿cuál es el cambio en la tarifa? ________
   iii) ¿Con esos datos puedes determinar el costo por hora de internet? ______
   iv) Ahora observa los datos de 4 a 5 horas. ¿Coincide con el precio por hora que habías determinado anteriormente? __________
   v) ¿Cuál es el costo fijo que Héctor paga por el servicio aunque el tiempo de uso sea nulo? __________
   vi) Si consideramos y la tarifa total y x el tiempo en horas que se utiliza internet, escribe una ecuación que represente la relación entre las cantidades:

   vii) Si para el siguiente mes la cantidad fija mensual se mantiene igual, pero el costo por hora de internet aumenta a $3.50, ¿cómo sería la gráfica de este nuevo precio respecto a la anterior? Dibújenla sobre el plano inicial.
   viii) Y si la compañía decide no aumentar el costo por hora de internet, pero sí la cuota fija al doble, ¿cómo sería la gráfica para este nuevo precio fijo respecto a la anterior? Dibújenla en el mismo plano de la original pero con un color distinto.
   ix) ¿Qué le convendría más a Héctor si tuviera la oportunidad de escoger entre el aumento por hora o el aumento en la tarifa fija? Explica por qué: ______________________

3 ¿Adónde llegamos?

a) Una empresa de la construcción pondrá a prueba tres materiales como aislantes térmicos para ser utilizados en techos de casas. Además, desea saber si alguno de ellos se calienta más conforme pasa el tiempo.

Para hacer la prueba, se aplica a los materiales una temperatura de 35°C y se inicia la medición de los cambios térmicos que experimenta por minuto cada material. La gráfica muestra el comportamiento de los tres:



i) Apóyate de tu regla para hacer las mediciones necesarias en la gráfica y completa la tabla:

	Cambio de temperatura (grados centígrados)		
Tiempo (minutos)	Material A	Material B	Material C
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			

ii) Calcula razón de cambio de la temperatura de cada material respecto a los intervalos de tiempo indicados en la tabla:

	Cambio de temperatura (grados centígrados)		
Intervalo	Material A	Material B	Material C
2 a 5 minutos			
6 a 12 minutos			

iii) Discute con tus compañeros sobre cuál material se calienta más rápido y cuál menos rápido. Escribe las conclusiones en tu cuaderno.

iv) Obtén las expresiones algebraicas que representan las rectas que muestran las variaciones de cada material y discute con tus compañeros la relación entre la rapidez con que se calienta cada material y la inclinación de la recta que lo representa. Anota una breve conclusión en tu cuaderno.

	Material A		Material B		Material C	
Ecuación	$y =$	$x + 0$	$y =$	$x + 0$	$y =$	$x + 0$

Algo por aprender

La **razón de cambio** es el cociente de los cambios que experimentan dos variables. Se asocia con frecuencia a las variaciones de posición, temperatura, longitud y otras variables respecto al tiempo. Veamos.

Si en el tiempo t una variable que depende de éste tiene un valor v y posteriormente, en el tiempo T, la variable tiene un valor V, la razón de cambio de la variable respecto al tiempo puede calcularse por la fórmula:

$$\frac{V - v}{T - t}$$

Para ilustrar el concepto de razón de cambio hemos recurrido a ejemplos en los que éste se da en función del tiempo, como los analizados en secciones anteriores de la lección. Sin embargo, en términos generales las razones de cambio sirven para comparar la variación de una variable respecto a otra, sea del tipo que sea. Esto significa que es posible aplicarlas también en el estudio de fenómenos en los que el cambio no está relacionado con el tiempo.

1. En sesión grupal, lean, comenten y resuelvan el siguiente desarrollo.

Se organizó una tarifa por un viaje en un autobús en función de la distancia recorrida, como se muestra en la tabla:

Tarifa	Distancia
\$75	50 km
\$135	90 km

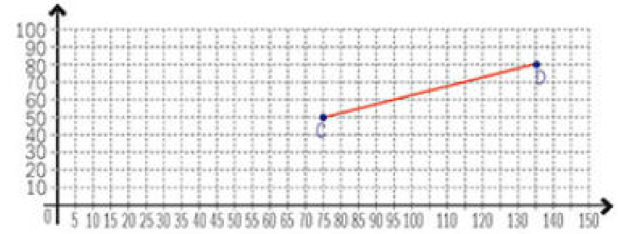
Con los datos anteriores podemos calcular la razón de cambio, entre la distancia (en km) y el precio por kilómetro recorrido. Lo cual quiere decir que por cada 2 km, se cobran \$3.

Razón: $\frac{90 - 50}{135 - 75} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

a) ¿Cuánto costará el pasaje para un recorrido de 70 km? ____________

b) ¿Cuántos km se recorrerán con una tarifa de \$100? ____________

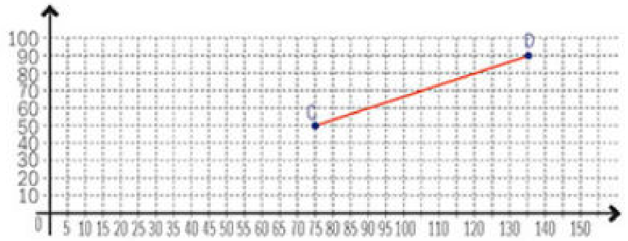
La razón de cambio se interpreta de manera gráfica como la pendiente o inclinación de la recta que representa la situación. Por ejemplo, en el caso anterior:



Los puntos C y D representan los pares ordenados C (75, 50) y D (135, 90). La pendiente (m) del segmento equivale a la razón de cambio obtenida, por lo que se expresaría:

$$m = \frac{90 - 50}{135 - 75} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

Si en la situación tienen sentido otros valores además de los que se muestran, como ocurre en este ejemplo donde la razón de cambio es constante respecto al número de km recorridos en función del costo. Por lo tanto, tiene sentido pensar que se trata de una recta.



Y si y es el total de km recorridos y x el costo pagado, la expresión algebraica que representa la situación sería: $y = \frac{2}{3}x$

Si los datos fueran:

Tarifa	Distancia
\$100	50 km
\$180	90 km

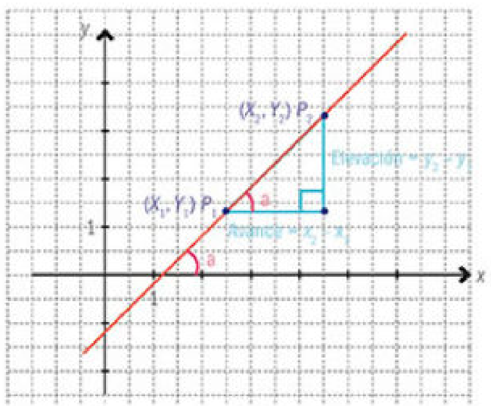
c) ¿Cómo se vería afectada la razón de cambio? ____________

d) ¿La recta estaría más o menos inclinada? ____________

Aprende con tecnología

Para estudiar más el tema de la pendiente de una recta, incluida su relación con una razón, resuelve los ejercicios que se ofrecen en: www.thatquiz.org/es/previewtest?A/J/K/V/97811299539616 (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Gráfica de una pendiente dados dos puntos

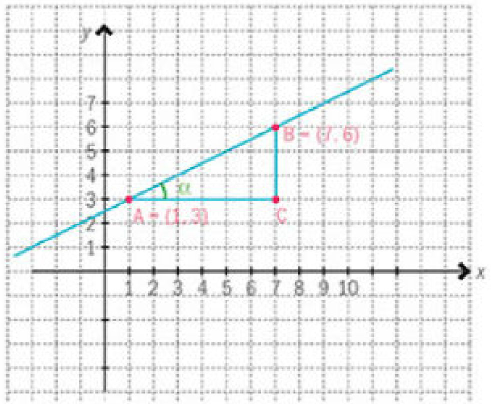


Esto significa que dados dos puntos por los que pasa una recta podemos determinar su pendiente, como se muestra en la gráfica, y la expresión es:

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como recordarás de las lecciones 3 y 4 de este bloque, el ángulo de una recta o segmento de recta puede obtenerse a partir de los catetos con los que forma un triángulo rectángulo, por lo que al conocer dos puntos de una recta podemos saber el valor de su pendiente y su ángulo de inclinación; como lo expone la gráfica.

Gráfica de una pendiente dados dos puntos



Asimismo, en las lecciones anteriores debatieron por su cuenta y con ayuda del profesor acerca de cómo obtener el ángulo a partir de las razones trigonométricas; en este caso las correspondientes a la gráfica anterior.

De esta manera podemos afirmar que dada una recta situada en un plano cartesiano que no sea paralela con el eje y, la inclinación o pendiente (m) de la misma se define como la razón $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ obtenida de dos de sus puntos, la cual también representa la razón de cambio.

Utilizo lo que aprendí

1. En parejas colaborativas debatan el siguiente planteamiento y resuélvanlo. Es importante que dialoguen y aclaren sus dudas con ayuda de su profesor.

a) Como se mencionó en el desarrollo de la lección, cuando dos variables están vinculadas mediante una relación funcional, es posible analizar el cambio relativo de una de las variables respecto de la otra. Algunas de las razones asociadas a dichos cambios de valores de las variables se han denominado con términos específicos.

i) Calculen las siguientes cinco de ellas:

ii) Tasa de crecimiento: la razón de cambio de la estatura de una persona respecto al tiempo.

Estatura	Tiempo
2 cm	2 meses
4 cm	8.5 meses

Razón de cambio = ____________

iii) Velocidad de enfriamiento: la razón de cambio de la temperatura de un líquido respecto al tiempo.

Temperatura	Tiempo
12 °C	12 minutos
7 °C	39 minutos

Razón de cambio = ____________

iv) Velocidad de calentamiento: la razón de cambio de la temperatura de un líquido en función del tiempo.

Temperatura	Tiempo
15 °C	23 minutos
37 °C	135 minutos

Razón de cambio = ____________

v) Velocidad: la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo.

Distancia	Tiempo
43 km	45 minutos
129 km	139 minutos

Razón de cambio = ____________

vi) Aceleración: la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo.

Velocidad	Tiempo
75 km/s	37 minutos
110 km/s	72 minutos

Razón de cambio = ____________

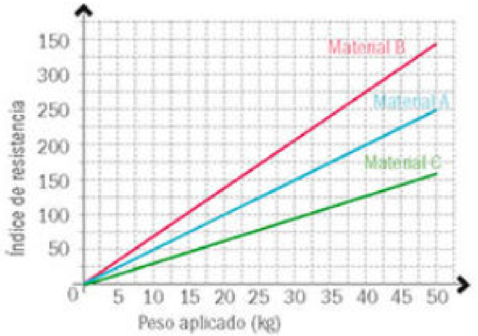
b) La siguiente gráfica muestra la relación entre la temperatura del vapor de agua y el tiempo transcurrido durante la producción de un gas.

i) ¿Cuál es la pendiente de la recta? ____________

ii) Escriban la expresión algebraica que represente la recta:

c) En un laboratorio se somete a prueba la resistencia de tres distintos materiales. Los resultados se presentan en la gráfica:

	Material A	Material B	Material C
Ecuación	$y =$	$y =$	$y =$
Pendiente de la recta	$m =$	$m =$	$m =$
Razón de cambio			



i) ¿Cuál es el material más resistente? ______ ¿Cuál el menos? ______ ¿Por qué? ____________

5 Análisis y representación de datos

Desviación y rango

Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media *(desviación media)*. Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

1 Comienza a pensar

1. Analiza el caso propuesto a continuación y contesta lo solicitado.

   a) Considera los siguientes datos, correspondientes a las calificaciones de un examen en un curso de capacitación de una empresa. Después utiliza una gráfica o una tabla para responder.

   5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5,
   5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5.

   i) Los valores de las medidas de tendencia central son:
   Media: _______ Mediana: _______ Moda: _______

   ii) Los valores de la variable ¿se "alejan" unos de otros? Explícalo: _________
   ____

   iii) Los valores de la variable ¿se "alejan" de la media? Explícalo: __________
   ____

   iv) ¿Cuál es la diferencia entre el valor mayor de los datos y el menor valor de éstos? _______ En otras palabras el rango es: _______________

   b) Con algunas modificaciones a los datos, responde con tablas o gráficas.

   4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 5, 2, 2, 4, 4, 4, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5,
   5, 5, 7, 6, 6, 6, 8, 8, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 6, 6.

   i) Los valores de las medidas de tendencia central son:
   Media: _______ Mediana: _______ Moda: _______

   ii) Los valores de la variable ¿se "alejan" unos de otros? Explícalo: _________
   ____

   iii) Los valores de la variable ¿se "alejan" de la media? Explícalo: __________
   ____

   iv) Calcula la diferencia de la media y cada uno de los datos, después suma los resultados de esas diferencias ¿Qué observas?_______________
   ____

   v) ¿Cuál es el valor del rango? _______________________

   c) Modificando drásticamente los datos, responde de la misma forma que en los incisos anteriores.

   4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 5, 2, 2, 4, 4, 4, 3, 1, 6, 8, 4, 5, 5, 4, 5, 4, 5, 6,
   5, 8, 9, 7, 9, 7, 6, 6, 6, 8, 8, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 6, 6.

   i) Los valores de las medidas de tendencia central son:
   Media: _______ Mediana: _______ Moda: _______

   ii) Los valores de la variable ¿se "alejan" unos de otros? Explícalo: _________
   ____

   iii) Los valores de la variable ¿se "alejan" de la media? Explícalo: __________
   ____

   iv) Calcula la diferencia de la media y cada uno de los datos, después suma los resultados de esas diferencias ¿Qué observas?_______________
   ____

   v) ¿Cuál es el valor del rango? _______________________

En estadística se construyen métodos para evitar usar toda la colección de datos y referirnos sólo a un número que puede aportar información acerca de la colección total de datos. Ese es el caso de las **medidas de tendencia central**. En los incisos anteriores no podríamos decir qué tan diferentes fueron los datos; o lo contrario, qué tan homogéneos (parecidos) fueron. Como puedes ver, en los conjuntos de datos anteriores, varios tienen las mismas medidas de tendencia central, particularmente la misma media. Respecto al rango entre los datos de los incisos anteriores, ¿qué puedes concluir? _______________________
¿Cuál es el más disperso? _______ ¿Por qué? _______________________
____

2 Analicemos juntos

1. En parejas, sigan el desarrollo a continuación, coméntenlo y respondan.

   a) En un despacho de cuentas por cobrar están comparando el desempeño de dos empleados, con el fin de decidir con cuál de ellos se quedará la empresa. Su jefe elegirá a quien tenga un mejor promedio (media aritmética).

   Los siguientes datos representan la conclusión de llamadas a clientes con adeudos que concreta cada empleado en un día, durante una semana:

Empleado	Lun	Mar	Mié	Jue	Vie
A	80	90	100	110	120
B	0	50	100	150	200

   i) Ayúdenle a obtener la media de cada uno de los resultados de ambos empleados.
   Media del empleado 1: _______ Media del empleado 2: _______

   ii) ¿Es posible tomar una decisión a partir de la media? _______ ¿Por qué?
   ____

   iii) Ahora el jefe ha pensado en revisar las diferencias que hay entre el dato menor y mayor de cada uno de los dos empleados. Obtengan dichas diferencias.

iii) Diferencia entre el mayor dato y el menor dato del empleado 1: ________

iv) Diferencia entre el mayor dato y el menor dato del empleado 2: ________

v) ¿Qué significado puedes atribuir a dichas diferencias?

____

____

v) En términos del desempeño de cada empleado, ¿por qué es útil dicha medida? ____

____

3 ¿Adónde llegamos?

1. En tríos colaborativos lean y respondan lo siguiente. Luego registren las respuestas consensuadas.

El rango es una "medida" de la dispersión de datos, no obstante hay datos muy diferentes que pueden tener el mismo rango, aunque tengan, por ejemplo, el mismo promedio.

a) En el siguiente caso, los datos pertenecen a dos jugadores de voleibol (J1 y J2) y representan los puntos que cada uno obtiene por partido para su equipo:

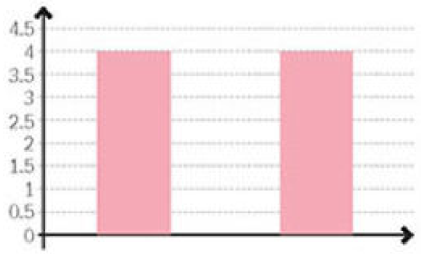
J1: 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6. El promedio es 5 y el rango es 2. ¿Por qué? ________

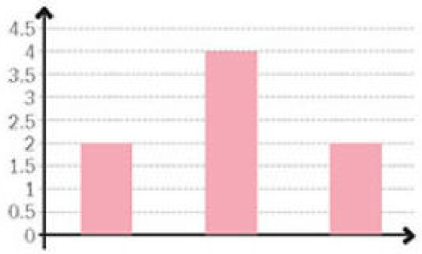
____

J2: 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6. El promedio es 5 y el rango es 2. ¿Por qué? ________

____

Pero son datos completamente, lo cual, además de los valores de cada colección de datos, puede analizarse a partir de sus gráficas:





i) Así que el rango es una medida para analizar la dispersión de los datos, pero será mejor considerar otras opciones. Una de ellas es la diferencia de cada dato respecto a la media y luego sumar esas diferencias.

ii) Si sumamos las diferencias de cada dato respecto a la media, ¿qué obtienen? ________ ¿Por qué? ________________________

____

iii) Ahora intenten obtener el valor absoluto de las diferencias:

____

____

____

Dato	Media -Dato	Diferencia respecto a la media (5)
4	5 - 4 =	1
4		
4		
4		
6		
6		
6		
6		
	Suma de las diferencias	

Dato	Media - Dato	Diferencia respecto a la media (5)
4		
4		
5		
5		
5		
5		
6		
6	5 - 6 =	-1
	Suma de las diferencias	

iv) En este caso, ¿la suma de las diferencias cambia? __________ ¿Por qué?

____

____

v) Ahora bien, cada diferencia indica qué tanto se aleja cada dato de la media, por tanto, si obtenemos la media de dichas diferencias, ¿qué valor se obtiene en cada caso?

Promedio de las diferencias del **J1**:________________________

Promedio de las diferencias del **J2**:________________________

vi) ¿Este promedio es útil para determinar qué jugador es menos disperso en su acumulación de puntos por partido? Expliquen su respuesta: ____

____

____

vii) ¿Qué jugador es menos disperso? ________ ¿Considera que es mejor tener un jugador, más o menos disperso? Explíquenlo: ____________

____

____

Dato	Media -Dato	Diferencia respecto a la media (5)
4	|5 - 4| = 1	1
4		
4		
4		
6		
6		
6		
6		
	Suma de las diferencias	

Dato	Media - Dato	Diferencia respecto a la media (5)
4		
4		
5		
5		
5		
5		
6		
6	|5 - 6| =	-1
	Suma de las diferencias	

4 Algo por aprender

Cuando se tiene una muestra de datos obtenida de una población cualquiera, es importante determinar sus **medidas de tendencia central**, también es básico determinar qué tan dispersos están los datos en la muestra, por lo que deben determinarse su rango, su desviación media, la varianza y la desviación estándar, entre otros, ya que mucha variabilidad o dispersión en los datos indica, en la mayoría de los casos, la inestabilidad de un proceso.

Rango o recorrido

El **rango** es la diferencia entre el valor mayor y el menor encontrados en la muestra. También se le denomina **recorrido** pues indica entre qué valores actúa la variable de interés. Por ejemplo, ante la pregunta sobre número de hijos por familia, una muestra de 12 hogares, marcó las siguientes respuestas:

2 1 2 4 1 3
2 3 2 0 5 1

El rango de la variable es:
Rango = 5 − 0 = 5

La medida de dispersión más sencilla y fácil de comprender es la **desviación media**; aunque apenas se utiliza es útil comprender su significado como punto de partida sobre todo para entender la desviación típica, que es la medida de dispersión más utilizada. Por ejemplo, si tenemos dos entrenadores, *A* y *B*, cada uno con cuatro jugadores, y sus puntuaciones de goleo por jornada son:

A: 3, 4, 6 y 7
B: 2, 3, 7 y 8

Ambos grupos tienen idéntica media:
$\bar{x} = 5$

Cada sujeto tiene una cierta desviación (d) con respecto a la media (x) de su grupo: unos porque están debajo de la media y otros porque están por arriba y tienen una puntuación superior.

Si un sujeto tuviera una puntuación igual a la media, su desviación sería $\bar{x} = 0$, pero sigue siendo válido el concepto de desviación con respecto a la media sin importar que el valor sea cero en este caso.

Ahora, si en cada grupo sumamos las desviaciones individuales consideradas en valores como valores absolutos

A: 3, 4, 6 y 7 **A:** 2, 1,-1,2
B: 2, 3, 7 y 8 **B:** 3, 2,-2-3,

y dividimos esta suma por el número de sujetos, tendremos la desviación media del grupo ($\bar{x}$):

$$\bar{d} = \frac{\Sigma|d|}{N}$$

$$\text{Desviación del grupo A} = \frac{|2+1+1+2|}{4} = 1.5$$

$$\text{Desviación del grupo B} = \frac{|3+2+2+3|}{4} = 2.5$$

Así, se concluye que:

Si bien ambos grupos de jugadores tienen la misma media, son grupos muy distintos. A simple vista se observa que el grupo *A* es más homogéneo (parejo o consistente) que el *B*; en el *B* los sujetos se apartan más de la media.

Aunque los dos grupos tienen la misma media, la dispersión del grupo *B* es mayor que la del grupo *A*, porque es menos homogéneo que éste, y que el grupo *A* tiene una desviación media más pequeña.

Por tanto la desviación media nos indica el grado de dispersión, es decir, de homogeneidad, entre un grupo de datos y otro.

Una misma media de 5 puede proceder de un grupo en el que todos tienen un 5 (dispersión = 0, grupo muy homogéneo; es decir, todos los sujetos son iguales), y una media de 5 también puede proceder de un grupo en el que la mitad de los sujetos tiene un 0 y la otra mitad un 10.

Una misma media puede corresponder a grupos muy distintos y por consiguiente aportar una información descriptiva incompleta que se presta a conclusiones falsas o al menos no muy certeras.

Utilizo lo que aprendí

La siguiente tabla muestra dos conjuntos de datos sobre la cantidad de lluvia en milímetros cúbicos (mm³) en dos ciudades.

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sept	Oct	Nov	Dic
C.M	86	135	177	170	321	290	231	305	243	122	66	67
C.G	40	77	84	89	147	166	184	251	209	110	31	13

1. Determina qué ciudad es más constante respecto a la cantidad de lluvia anual, lo cual es importante para decidir el cultivo de ciertas variedades de plantas.

   a) Calcula la media respecto a la variable *cantidad de lluvia* en cada una.
   b) Calcula el rango respecto a la variable *cantidad de lluvia* en cada una.
   c) ¿Es posible establecer la dispersión a través de las medidas anteriores? ¿Por qué?
   d) Ahora utiliza la desviación media para tomar una decisión al respecto.

2. Tres jugadores de baloncesto son sometidos a una prueba de tiros libres a la canasta contando las encestadas seguidas desde 10 posiciones distintas en la cancha. La idea del concurso es encontrar al jugador más idóneo para integrarse al equipo principal.

El número de encestes seguidos según la posición se muestra en la tabla:

Posición	Carlos	Pedro	Juan
1	2	7	5
2	9	2	6
3	10	2	5
4	2	6	5
5	3	6	5
6	1	3	5
7	9	6	4
8	9	7	5
9	1	6	6
10	4	5	4

a) Lo primero que analizaremos es la media de los puntajes para cada uno de los jugadores, con el fin de determinar cuál de ellos tiene mejor promedio general de encestes.
b) Obtén la media de cada jugador. ¿Ya es posible tomar una decisión?____
c) ¿Cuál puede ser el indicador que ayude a diferenciar a los jugadores?____
d) ¿Cómo lo determinarías?____

Haz los cálculos en tu cuaderno.

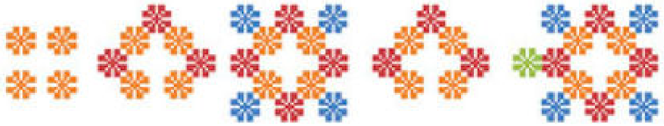
e) ¿Qué decisión debe tomar el colegio para elegir a su jugador?____

¿Por qué?____

Prueba tipo PISA

I Bordado

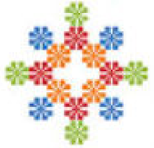
Un mes antes del cumpleaños de su mamá, Mónica, comenzó a bordar su obsequio: una cobija. En la primera semana tenía los siguientes estampados:



Durante la segunda semana, Mónica pudo avanzar muy poco debido a que tuvo mucho qué hacer en su trabajo.

1. Los bordados de la cobija es una sucesión. De acuerdo a está, ¿cuántas flores tendrá el bordado número 7?
   a) 22 b) 25 c) 26 d) 29

2. Ella piensa que ya terminó el cuarto bordado.



¿Tiene o no razón? ¿Por qué?

____

____

3. Observa las sucesiones que Mónica consideró antes de iniciar la cobija y ayúdala revisando si cada una de las expresiones es correcta de acuerdo con su sucesión; n toma valores 1, 2, 3, 4 y así sucesivamente.

Sucesión	Expresión	¿Correcta o Incorrecta?
1, 10, 20, 30, ...	$10n$	
1, 4, 9, 16, ...	n^2	
7, 22, 47, 82, ...	$5n^2 2 + 2$	
5, 11, 19, 20, ...	$n^2 + 3n + 1$	
2, 4, 12, 14, ...	$2n$	

II Repisas

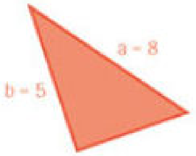
Para este fin de semana, Carlos tiene planeado instalar algunas repisas en diferentes puntos de su casa. El material que considera para efectuar su plan son: repisas rectangulares, ménsulas (piezas de acero en forma de triángulo rectángulo con las que detendrá las repisas), taladro y taquetes. Además, las repisas tienen diferentes características, descritas a continuación:

En la primera, la parte de la ménsula que se fijará a la pared tiene una longitud de 40 cm y su ángulo menor mide 60°. Carlos quiere fijar la segunda ménsula a la pared apoyada por un soporte recto de 65 cm, que tiene uno de sus extremos en un punto situado a 54 cm debajo de la parte horizontal de la repisa.

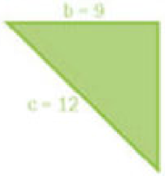
4. Con la información que conoce de la primera repisa, Carlos determina que el ancho de la repisa es de __________ cm.

5. ¿Cuál es el ángulo que forma el soporte de la segunda repisa con la pared?
   a) 20 b) 33 c) 45 d) 60

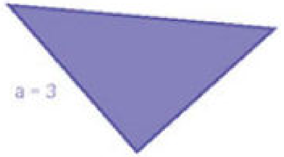
6. Observa las siguientes figuras y lee con atención los enunciados que las acompañan.



$c = \sqrt{89}$
¿Verdadero o falso?



$a = \sqrt{63}$
¿Verdadero o falso?



$b = \sqrt{45}$
¿Verdadero o falso?

7. De acuerdo con la información proporcionada, establece la razón trigonométrica correspondiente en cada uno de los casos.
   a) El cociente de dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente se llama: __________
   b) El cociente de dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa se llama: __________
   c) El cociente de dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa se llama: __________

III Pintar el patio

Patricia está buscando presupuestos para que pinten el patio de su casa. Considera que la pintura que se utilice para cubrir el patio es directamente proporcional a la superficie que se desea pintar. Con base en esta idea, tiene las siguientes propuestas: Juan pinta 15 m² con 0.8 l; Salvador pinta 18 m² con 0.95 l; y por último, Nancy pinta 16 m² con 0.86 l.

8. Para elegir su mejor opción, Patricia hace un análisis de cada propuesta. Ayúdala revisando si cada una de las expresiones es correcta de acuerdo con la relación correspondiente.

Superficie m² (y)	5	10	15	20
Litros (x)	4	8	0.8	1.06
¿Verdadero o falso?				

9. Según los valores obtenidos de la propuesta hecha por Nancy, ¿ésta corresponde a una función lineal? Sí o no. ¿Por qué?

____

____

____

10. Patricia garantiza que de acuerdo con la propuesta hecha por Salvador, los datos generan una recta, ¿cuál es la pendiente de la recta?
    a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{18}{0.95}$ d) $\frac{0.95}{18}$

Ponte a prueba

I Lee con atención cada uno de los problemas que a continuación se presentan y elige la respuesta que consideres correcta.

1. La energía cinética de un móvil está dada por una relación entre su masa y su velocidad. Un cuerpo con una masa de 10 kg, tiene una energía cinética determinada. Así, la sucesión 5, 20, 45, 80 joules, corresponde a la energía cinética de este cuerpo de 10 kg, con una velocidad (v) de 1, 2, 3 y 4 m/s. ¿Cuál de las siguientes expresiones indica la energía cinética del móvil en función de su velocidad?

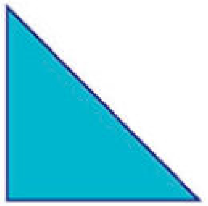
   a) $5v^2$ b) $3v^2$ c) $2v^2$ d) v^2

2. Según la sucesión cuya expresión está dada por $\frac{1}{2}x^2$, ¿qué término corresponde a $x = 10$?

   a) 10 b) 100 c) 200 d) 50

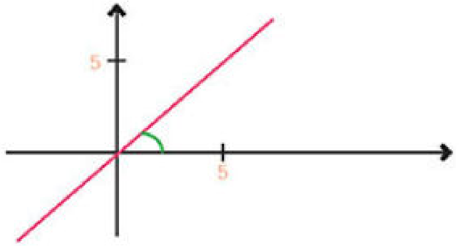
3. Cuando un triángulo rectángulo se gira sobre un eje:

   a) se obtiene una base rectangular, generando un cilindro.
   b) se obtiene una base circular, generando un cono.
   c) se obtiene una base triangular, generando una pirámide.
   d) se obtiene una base circular, generando un cilindro.



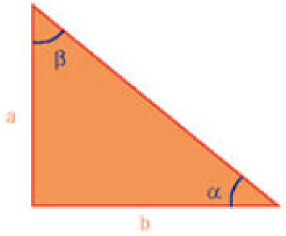
4. ¿Cuál de los enunciados describe la recta de la gráfica?

   a) La pendiente de la recta es 5 y el ángulo que forma con el eje de las abscisas es de 45°.
   b) La pendiente de la recta es 1 y el ángulo que forma con el eje de las abscisas es de 5°.
   c) La pendiente de la recta es 1 y el ángulo que forma con el eje de las abscisas es de 45°.
   d) La pendiente de la recta es 5 y el ángulo que forma con el eje de las abscisas es de 25°.



5. Con base en el triángulo rectángulo, ¿cuál de las siguientes expresiones es correcta?

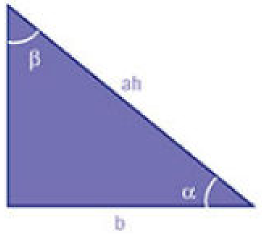
   a) $\tan \beta = \frac{b}{a}$
   b) $\tan \alpha = \frac{b}{a}$
   c) $\tan \beta = \frac{a}{b}$
   d) $\tan \alpha = a$



6. Si en el triángulo rectángulo del punto anterior $\alpha = 30°$ y $\alpha = 2$ cm, ¿qué longitud tiene la hipotenusa?

   a) 4 cm
   b) 2 cm
   c) 5 cm
   d) 7 cm

7. Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si $\alpha = 45°$ y $\alpha = 5$ cm.



   a) La longitud es de menos de 7 cm.
   b) La longitud es de aproximadamente 7 cm.
   c) La longitud es de 5.8 cm.
   d) La longitud es de aproximadamente 15 cm.

8. La distancia d que recorre un móvil está dada por la ecuación $d = 65t$, donde t es el tiempo transcurrido y 65 es la velocidad en km/h. ¿Qué representa la pendiente de la recta $d = 65t$?

   a) La pendiente de la recta que representa la relación $d = 65t$, corresponde a la inclinación de la recta.
   b) La pendiente de la recta que representa la relación $d = 65t$, corresponde al tiempo transcurrido.
   c) La pendiente de la recta que representa la relación $d = 65t$, corresponde a la distancia recorrida.
   d) La pendiente de la recta que representa la relación $d = 65t$, corresponde a la velocidad promedio.

9. En un refugio para perros, las edades de los caninos que ahí habitan son las siguientes: Un cachorro de un año, cinco perros de 7 años, tres de 2 años, uno de 3 años, dos de 4 años y dos más de 5 años. ¿Cuál es la medida de dispersión que sirve para saber la diferencia de edades entre el perro más joven y el más viejo?

   a) El promedio de las edades.
   b) La frecuencia de cada edad.
   c) El rango.
   d) La desviación media.

10. De acuerdo a los datos del punto anterior, ¿cuál es la desviación media de las edades de los perros?

   a) 1.9
   b) 6
   c) 14
   d) 4.5

Bloque 5

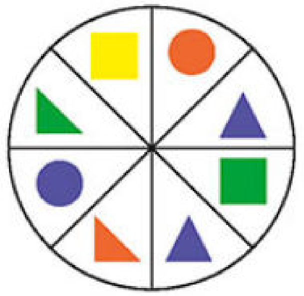
Ejes temáticos	Temas	Secuencia de aprendizaje
Sentido numérico y pensamiento algebraico	1. Patrones y ecuaciones	• Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada
Forma, espacio y medida	2. Medida	• Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto • Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides • Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas
Manejo de la información	3. Probabilidad y funciones	• Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades
	4. Análisis y representación de datos	• Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Activa tus competencias

Lorena fue a una feria y jugó en una ruleta como la que se muestra a continuación.



Considera los siguientes eventos:

$E1$ = {Que salga un polígono regular}
$E2$ = {Que la figura sea de color anaranjado}
$E3$ = {Que salga círculo}
$E4$ = {Que salga triángulo rectángulo}

- ¿Son los eventos $E1$ y $E2$ complementarios, mutuamente excluyentes o independientes?, ¿por qué?
- ¿Son los eventos $E1$, $E3$ y $E4$ complementarios, mutuamente excluyentes o independientes?, ¿por qué?

Entonces:

Escribe dos eventos que sean complementarios.
Ahora, escribe dos eventos que sean mutuamente excluyentes.
Finalmente, escribe dos eventos que sean independientes.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

1 Patrones y ecuaciones

Ecuaciones de varios tipos

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

1 Comienza a pensar

1. En equipos, analicen y resuelvan la siguiente situación.

a) Luis colocó una alambrada en un terreno rectangular y además plantó césped. En total, utilizó 76 m de alambre y 312 m^2 de césped. Entonces, ¿cuáles eran las dimensiones del terreno?

i) Discutan una forma de resolver el problema, aplíquenla y registren sus operaciones para comprobar si la solución que obtuvieron es correcta o no.

ii) Si no es correcta, discutan otro procedimiento y úsenlo, y así sucesivamente hasta encontrar la solución. Describe la forma de resolverlo.

b) Ahora compara el caso anterior con el siguiente.

Encontrar dos números que sumados den como resultado 38 y multiplicados 312.

i) Resuelvan el problema y registren sus operaciones.

ii) Finalmente, registren sus conclusiones acerca de lo comparado: ______

c) Nuevamente compara el caso anterior con el presentado a continuación.
En una fiesta hay 38 personas, hombres y mujeres. Si se pueden formar un total de 312 parejas hombre–mujer, ¿cuántos hombres y mujeres hay en la fiesta?

i) Para comenzar, resuelvan el problema y anoten sus operaciones.

ii) Con el mismo método y los mismos datos puedes resolver una gran cantidad de problemas, pero, ¿qué sucede si los datos cambian? ¿El método que empleaste seguirá funcionando?
Expliquen su reflexión al respecto: ______

iii) ¿Todos los contextos de los problemas anteriores tendrían sentido para cualquier tipo de datos? Expliquen su respuesta: ______

2 Analicemos juntos

1. Con tus compañeros y de acuerdo con las instrucciones de tu maestro, discutan el siguiente caso y respondan.

a) Se ha colocado tubería para el drenaje en un terreno rectangular, cuyo largo tiene 8 m más que el ancho. Si se usaron 84 m de tubo, ¿cuáles son las dimensiones del terreno rectangular? Describe la forma de resolverlo.

b) A continuación, reflexiona en la relación que tiene este problema con el siguiente: Encontrar dos números que sumados den como resultado 42 y restados den 8.

i) Para iniciar, resuelve este problema:

ii) ¿Qué notaste al compararlos? Escribe tu respuesta: ____________________

c) Analiza otro caso:
En una fiesta hay 42 personas, hombres y mujeres. Si hay 8 hombres más que mujeres, ¿cuántos hombres y mujeres hay en el evento? Escribe las operaciones para resolverlo:

i) Ahora, compara este último problema con el anterior. ¿En qué se relacionan? ____________________

En la sección anterior se expresó que con el mismo método y los mismos datos es posible resolver una gran cantidad de problemas.

2. En parejas colaborativas, planteen tres problemas que puedan resolver con el mismo método y los mismos datos.

Problema	Operaciones

¿Adónde llegamos?

1. Analiza los siguientes sistemas y responde lo que se te solicita.

a) Resuelve los dos sistemas de ecuaciones y después plantea dos problemas en los cuales se use dicho sistema además de que las soluciones del sistema de ecuaciones sean soluciones del problema.

Sistema de ecuaciones 1

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

i) Describe el procedimiento para resolver el sistema: ____________________

ii) Ahora haz las operaciones correspondientes.

iii) Es momento de plantear los dos problemas:

Problema 1: ____________________

Problema 2: ____________________

Sistema de ecuaciones 2

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ xy &= 20 \end{aligned}$$

i) Describe el procedimiento para resolver el sistema: ____________________

ii) Ahora haz las operaciones correspondientes.

iii) Es momento de plantear los dos problemas:

Problema 1: ____________________

Problema 2: ____________________

Algo por aprender

Los procedimientos y técnicas matemáticos sirven para resolver una gran cantidad de problemas; pero según los datos empleados y el contexto elegido, pueden tener diferente dificultad e incluso algunos métodos pueden fallar, a pesar de tratarse de situaciones muy similares.

Conexión matemática

Quizá hayas observado una pelota de béisbol, baloncesto, tenis o voleibol al ser lanzadas o golpeadas. Se trata de un movimiento de proyectiles cuya trayectoria siempre es una parábola. Puedes conocer la ecuación: http://espaciodeltie.blogspot.mx/p/introduccion.html (consultado el 2 de diciembre de 2016).

1. Agrúpense en tríos y considerando la información del párrafo anterior, resuelvan los siguientes problemas.

a) Una llave de agua llena un depósito en 10 minutos y otra lo llena en 20 minutos. Si ambas se abren a la vez, ¿en cuánto tiempo llenarán el tanque? Registren sus operaciones:

b) Comparen su procedimiento con el de otros tríos y seleccionen varios de ellos con el objetivo de que analicen cuáles serán útiles para resolver un segundo problema en esta sección.

c) Una llave de agua llena un depósito en 17 minutos y otra lo llena en 23 minutos, si ambas se abren a la vez, ¿en cuánto tiempo llenarán el tanque?

d) ¿Qué relación tiene este problema de las llaves con los siguientes problemas? Analícenlo, resuélvanlo y al final registren sus conclusiones.

Problema	Operaciones
Una secretaria transcribe un documento en 7 días y con su compañera puede transcribirlo en 11 si ambas trabajan juntas, ¿en cuánto tiempo la concluirán?	
Una persona sube a un piso por una escalera fija en 15 segundos y puede subir por la escalera eléctrica en 10 segundos. ¿En cuánto tiempo subirá al piso si camina por la escalera eléctrica?	
Dos trenes que están sobre una vía marchan en direcciones opuestas, uno avanza a 10 km/h y el otro a 20 km/h. ¿En cuánto tiempo colisionarán?	

e) Ahora redacten un breve resumen en el que anoten sus observaciones al comparar los problemas de las llaves con los planteamientos anteriores.

5 Utilizo lo que aprendí

1. Copia los siguientes problemas en hojas aparte y resuélvelos. Puedes sugerir a tu profesor su revisión en el aula.

a) Encuentra las ecuaciones que representan las relaciones entre los datos que se indican en el texto.
b) Resuelve las ecuaciones correspondientes.
c) Determina la solución del problema.
d) Comprueba la solución encontrada.
e) Plantea dos problemas similares al que resolviste con datos distintos y, de ser posible, halla otra forma de resolverlos.

Aprende de los errores

Un amigo afirma que cuando el problema indica de *juntar* o *quitar*, se refiere a una suma o una resta. ¿Qué le dirías al respecto? ¿Será cierto?

Casos

i) Un ganadero tiene un determinado número de caballerizas para sus equinos. Si introduce 6 animales en cada caballeriza, quedan cuatro plazas libres en una de éstas. Y si introduce 5 quedan dos animales libres. Entonces, ¿cuántos caballos y caballerizas hay?
ii) En una fábrica purificadora de agua se han envasado 600 litros de este líquido en 240 botellas de 4 y 10 litros. ¿Cuántas botellas de cada capacidad se han utilizado?
iii) Un abuelo repartirá dinero entre sus nietos. Si daba \$300 a cada uno, le sobraban \$600, y si daba \$500 le faltaban \$1000. ¿Cuántos nietos tiene? ¿Qué cantidad quería repartir?
iv) Calcula las dimensiones de un edificio que se remodelará. Los arquitectos plantean que al aumentar la base en 7 m y disminuir la altura en 7 m, la superficie no varía; pero si aumentan la base en 7 m y disminuyen la altura en 6 m, la superficie aumentará en 6 m^2.
v) A las ocho de la noche sale de la ciudad una camioneta a una velocidad de 80 km/h. Hora y media después hace lo mismo un auto con la misión de alcanzarla; este segundo vehículo lleva una velocidad de 120 km/h. ¿A qué hora lo alcanzará? ¿A qué distancia de la ciudad?
vi) Dos personas de mantenimiento han llenado un depósito de 31 m^3, trabajando el primero de ellos 7 h y el otro 2 h. Para terminar, llenan otro depósito de 27 m^3, trabajando uno 4 h y el otro 3 h. ¿Cuántos litros vierte por hora cada uno?
vii) Cuando un reloj señala las nueve en punto sus manecillas forman un ángulo recto. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que formen de nuevo un ángulo recto?
viii) Calcula los lados de un terreno en el que se fabricarán edificios, equivalente a un cuadrado de 36 m por lado, sabiendo que uno es igual a $\frac{4}{9}$ del otro.
ix) A una obra pictórica con una superficie total de 1.50 m de largo por 90 cm de alto se le pone un marco de anchura constante. Si el área total del cuadro y el marco es de 1.6 m^2, ¿cuál es la anchura del marco?
x) Un polígono de n lados tiene $\frac{1}{2}n(n-3)$ diagonales. ¿Cuántos lados tiene un polígono con 27 diagonales?

2 Medida

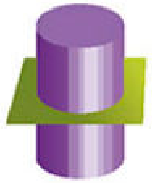
Regla del producto

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto.
Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

1 Comienza a pensar

1. Analiza los siguientes planteamientos y responde.

a) Al cortar un cilindro en un plano paralelo a la base, como se muestra en la figura, ¿qué forma tiene la sección del corte?



b) Si un cilindro se corta con un plano que no sea paralelo a la base, como en la figura, ¿cómo te imaginas la figura geométrica que queda en la sección de corte?

c) Por último, si el plano que corta un cilindro coincide con algún diámetro de la base y es perpendicular a ésta, ¿cómo imaginan que será la figura que resulte en la sección de corte?

i) Comparen y discutan en grupo las respuestas. ¿Coinciden? _______ ¿Por qué? ____

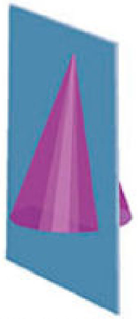
____

ii) Una manera de demostrar los diferentes puntos de vista es hacer los cortes solicitados en los incisos anteriores con el filo de una tarjeta o credencial en un cilindro construido con plastilina. ¿Listos para intentarlo?

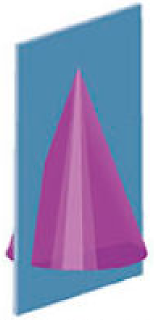
2 Analicemos juntos

1. En parejas, observen, comenten y resuelvan lo que se pide.

a) De acuerdo con los cortes generados en diversos conos, dibujen en el espacio de abajo la figura que se formará en la sección de corte de cada figura.



Aquí el plano de corte pasa por un diámetro de la base del cono y es perpendicular a la misma.

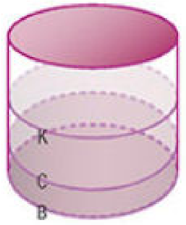


Aquí el plano de corte pasa por una cuerda de la base del cono y es perpendicular a ésta.

3 ¿Adónde llegamos?

1. En tríos, discutan y respondan lo siguiente.

a) Consideren varios cortes por planos perpendiculares al eje de un cilindro recto. La vista de lado luciría así:



i) Los cortes *C* y *K*, ¿son circunferencias? _______ ¿Por qué? ____________

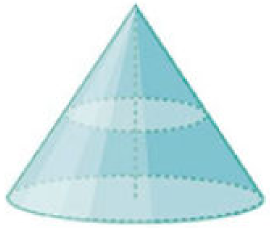
____

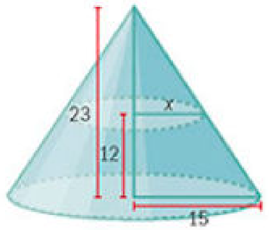
ii) Si el radio de la base es de 12 cm, ¿cuál será el radio de las circunferencias que resultan de los cortes? ____________________

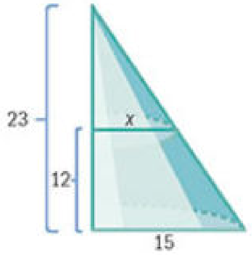
b) Construyan un cilindro recto de plastilina y encuentren los radios de las circunferencias que resultarían de cortes de planos perpendiculares al eje del cilindro, a distintas alturas.

c) Ahora imaginemos un cono con un corte en un plano perpendicular a su eje, ¿se formaría una circunferencia? _______ ¿Por qué? ____________

____







d) Supongan ahora que el radio de la base del cono mide 15 cm y su altura 23 cm. Si el corte se hizo a 12 cm de la base, ¿cuál será el radio de la circunferencia en el corte? ____________________

e) ¿Cuántos triángulos se forman en la figura a la derecha? __________
¿Cómo son los triángulos? ______ ¿Por qué? ____________________

____

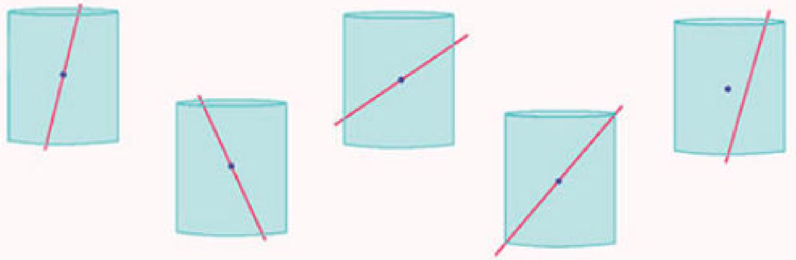
Esto hace posible la igualdad: $\frac{x}{\square} = \frac{\square}{\square}$

De ello se obtiene que el radio de la circunferencia generada en el corte es $x = \square$

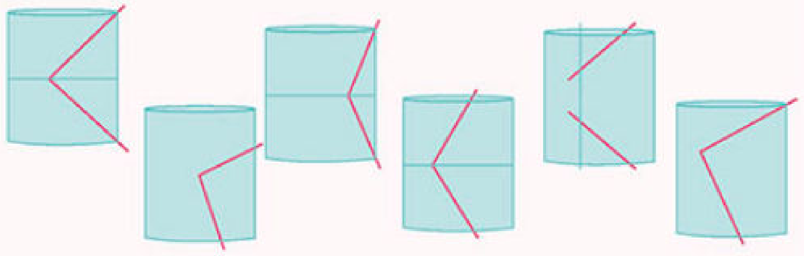
f) Por último, construyan un cono recto de plastilina y encuentren los radios de las circunferencias que se formarían al cortar al cono a distintas alturas, por planos perpendiculares al eje del cono.

Conexión matemática

Si hacemos los siguientes cortes en un cono recto, ¿qué figuras obtendremos? Dibújalas en media cartulina de color y pide a tu profesor permiso para exhibirlas en clase.



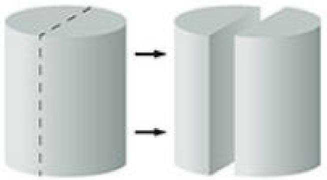
¿Qué figuras podrán obtenerse si, en vez de un plano, fueran dos los que cortaran el cilindro? Dibújalas en tu cuaderno.



Algo por aprender

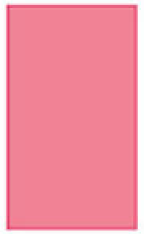
Los diversos cortes hechos en un cilindro recto por planos en distintas posiciones generan variadas formas en las secciones del corte:

Longitudinal

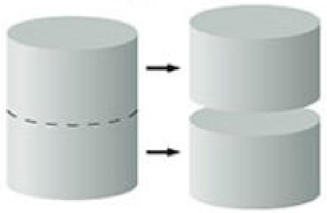


Longitudinal

La forma de la sección del corte es un rectángulo:

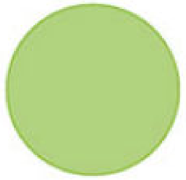


Transversal

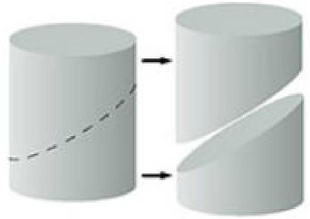


Transversal

La forma de la sección del corte es una circunferencia:

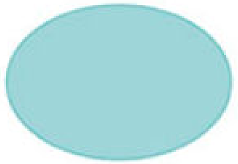


Oblicuo



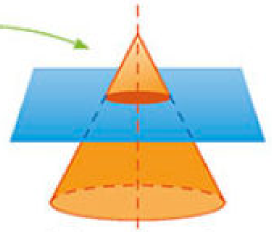
Oblicuo

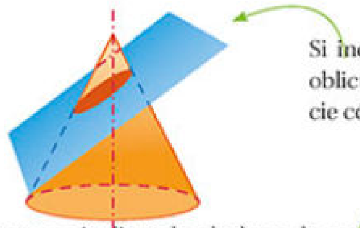
La forma de la sección del corte es una elipse:



Cuando se hacen cortes a un cono...

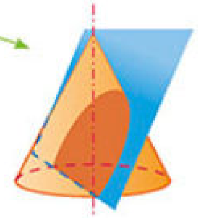
Como su nombre indica, las secciones cónicas son curvas que se obtienen de la intersección de un plano con un cono. Si el plano que corta a la superficie cónica es perpendicular al eje, la sección es una circunferencia.





Si inclinamos el plano de modo que sea oblicuo con el eje y corta a toda la superficie cónica, la sección es una elipse.

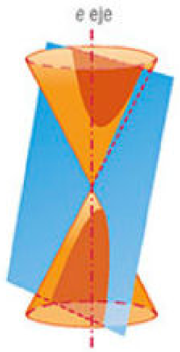
Si continuamos inclinando el plano de modo que sea oblicuo con el eje y que sea paralelo a una generatriz de la superficie cónica, se obtiene una parábola.

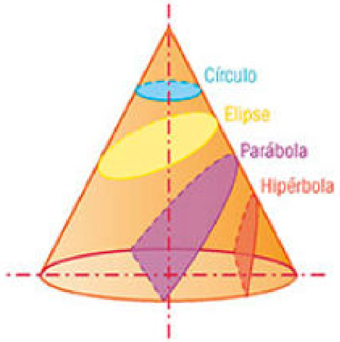


Aprende con tecnología

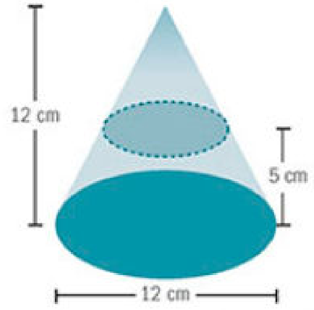
Para explorar aún más el tema de las secciones cónicas, observar algunos ejercicios y reflexionar con algunos conceptos, además de resolver ejercicios, visita las páginas de internet: http://goo.gl/Zk2E5 y http://math2.org/math/algebra/es-conics.htm (consultados el 2 de diciembre de 2016).

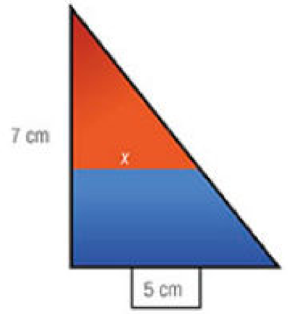
Si inclinamos aún más el plano, de modo que sea paralelo al eje horizontal del cilindro, se obtiene una curva con dos ramas llamada hipérbola.





Cuando se genera un corte perpendicular al eje de un cono se genera una circunferencia de la cual es posible calcular la medida de su radio, pues esto produce triángulos semejantes, como se aprecia en la figura de abajo:





¿Con base en qué los triángulos rojo y azul son semejantes? ______________

¿Por qué? Reflexiona en el criterio de semejanza. ______________

____

Donde x representa la media del radio de la sección cónica en forma de circunferencia, y es posible establecer la proporción $\frac{x}{7} = \frac{6}{12}$, de donde $x = \frac{(7)(6)}{12}$, por tanto $x = \frac{42}{12} = 3.5$ cm.

Utilizo lo que aprendí

1. Analiza los siguientes planteamientos y resuelve lo que se te pide.

a) Si consideras los mismos datos del cono del inciso *d)*, de la sección, "¿A dónde llegamos?", ¿a qué distancia del vértice del cono debe hacerse un corte para que la circunferencia generada tenga radio 5? Discútanlo en grupo y registra la respuesta a la que encontraron:

____

____

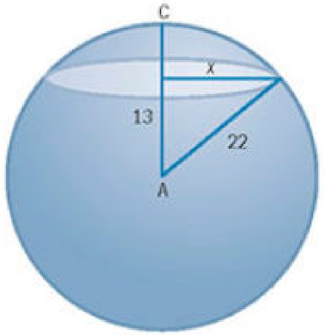
____

b) Considera una esfera que tiene de radio 25 cm; córtala a una distancia del centro de 13 cm con un plano.

i) ¿Lo que se genera es una circunferencia? ________ ¿Por qué? ________

____

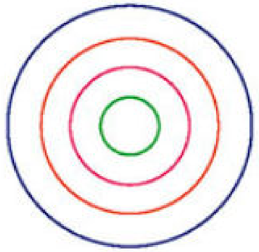
ii) ¿Cuál será su radio? ______________



iii) De la figura se infiere que $x = \sqrt{\square^2 - \square^2}$, ¿por qué? ______________

____

c) Si efectúan varios cortes en un cuerpo, por planos diversos, y desde arriba se observa lo siguiente:

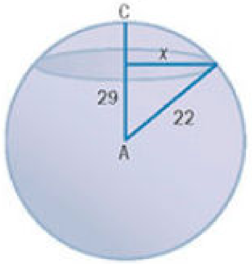


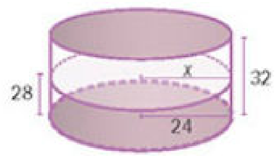
i) ¿A qué cuerpo o cuerpos se refiere? ______________

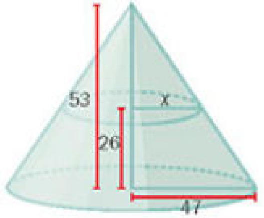
ii) Si el círculo azul es el corte en la parte más baja, luego más arriba el círculo rojo corresponde al corte inmediato superior y luego el anaranjado es el siguiente corte más alto y el verde es el corte que se hizo a mayor altura.

iii) Si el corte en verde es el que se hizo más abajo de un cuerpo, luego el rojo arriba y enseguida el anaranjado más arriba.

d) Encuentra los radios de las circunferencias resultantes al cortar cilindros y conos rectos por planos perpendiculares a los ejes. Hazlo también en las esferas y recuerda que en todos los casos las unidades (cm).







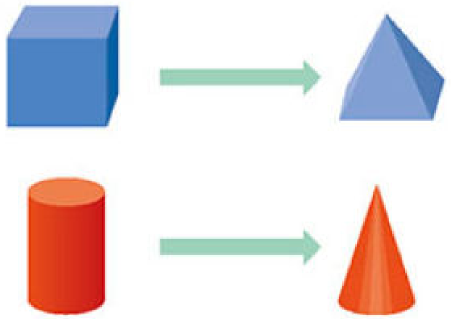
De los prismas y pirámides a los cilindros y conos

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fómulas de prismas y pirámides.

1 Comienza a pensar

1. De acuerdo con las indicaciones de tu maestro, organícense en equipos para analizar y resolver la situación.

a) Una empresa que produce jugos de fruta y helado, empacaba sus productos en un envase con forma de prisma rectangular para los jugos, y cilíndrica para los helados. Sin embargo, para el próximo año empacará el jugo en envase piramidal y el helado en cónico, ambos con la misma altura y la misma área en la base y los dos a mitad de precio.



i) Tal medida, ¿convino a los consumidores? ______ ¿Por qué? ______

ii) ¿Cuál es la relación entre el volumen de un prisma y el de una pirámide con la misma área de base y la misma altura? Argumenten su respuesta: ______

iii) ¿Está relación será igual entre el cilindro y el cono con idéntica base y altura? ______ Expliquen por qué: ______

iv) ¿Cuánto dinero y cantidad gana o pierde la empresa al vender el contenido de jugo o helado en dichos envases? Para responderlo necesitarán obtener el volumen, por lo que será necesario que recuperen los conocimientos sobre el tema acudiendo a la biblioteca, lo resuelvan y registren sus operaciones en el recuadro. Finalmente, respondan la pregunta inicial mediante una breve redacción.

______

2 Analicemos juntos

1. En parejas, reflexionen la información y resuelvan cada caso.

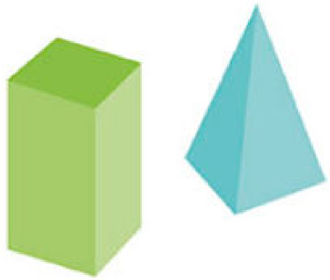
a) En una oficina se habían empleado vasos cilíndricos para tomar agua, cuyo costo era de \$0.25. Para ahorrar cambiaron los vasos cilíndricos por recipientes en forma de cono de las mismas altura y base de los cilíndricos con costo de \$0.10. El administrador, a pesar de que se consume la misma cantidad de agua, estaba orgulloso de su estrategia de ahorro, pero cuando se la comenta a uno de sus amigos que es matemático, él le dice que ahora gasta más en la compra de los conos. ¿Por qué? ______

b) Una empresa de perfumes decidió cambiar el frasco cilíndrico de su producto por uno con forma cónica. El perfume en envase cilíndrico costaba \$2 456 y el perfume en envase cónico se vendió a \$1 350, así que las ganancias aumentaron rápidamente. ¿Por qué? ______

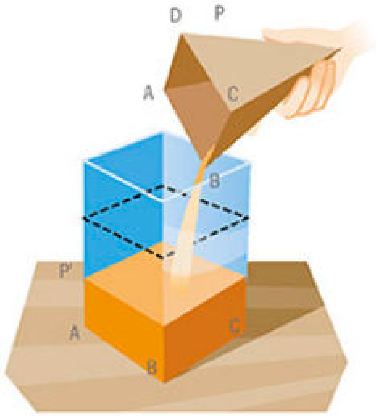
3 ¿Adónde llegamos?

1. Es momento de que practiques solo. Resuelve los siguientes casos.

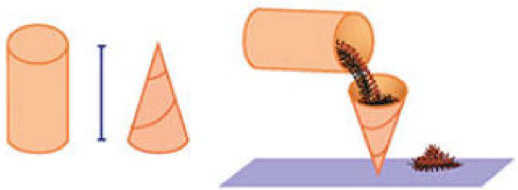
a) Construye un prisma de base cuadrada y una pirámide con la misma base y altura.



i) ¿Qué relación hay entre los volúmenes de dichos tipos de recipientes? ______



b) ¿Con el contenido de cuántas pirámides llenas un prisma de la misma base y altura? Explica tu respuesta: ______



c) Construye un cono y un cilindro que tengan la misma base y altura, y llénalos de arena o agua para encontrar la relación entre los volúmenes de estos recipientes.

i) ¿Con el contenido de cuántos conos llenas un cilindro de la misma base y altura? Redacta el procedimiento: ______________________

____

____

ii) ¿Con el contenido de cuántos cilindros llenas un cono de la misma base y altura? Redacta el procedimiento: ______________________

____

____

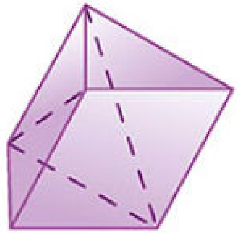
Aprende con tecnología

Para consultar varios aspectos sobre el volumen del cono puedes visitar el sitio de internet: www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/cono.html (consultado el 2 de diciembre de 2016).

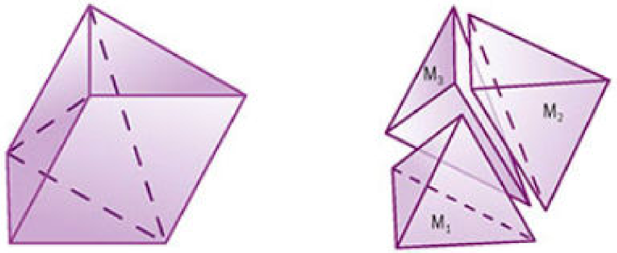
Algo por aprender

Un resultado que se atribuye a Demócrito de Abdera –a quien ya conoces– se refiere a que hay una importante relación entre el volumen de un prisma de base triangular y pirámides con la misma base y altura.

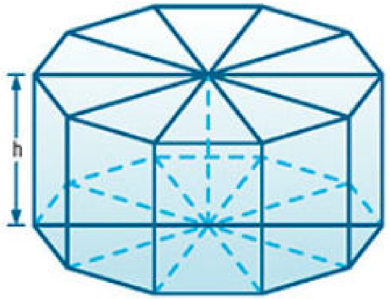
En efecto, un prisma triangular:



Puede dividirse en tres pirámides de igual volumen.



A partir de esta idea podemos pensar en que toda pirámide poligonal:

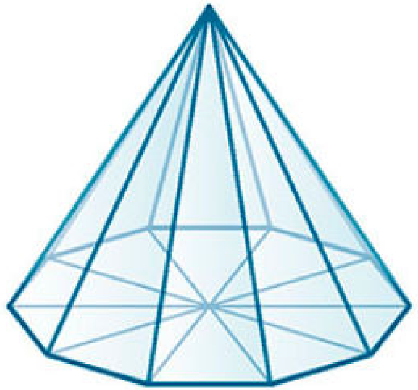


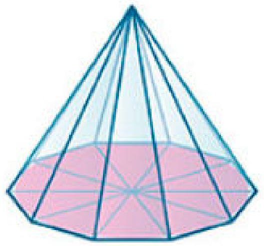
Puede dividirse en pirámides de igual volumen:

Y éstas, a su vez, en otras de menor volumen, iguales entre sí:

Ahora observemos:

Al unir los vértices de cada grupo de pirámides, sin alterar la altura de cada pirámide triangular, se obtendrían tres pirámides del mismo tipo:





Si el polígono de la base del prisma tiene muchos lados, la base se parecerá a un círculo y entonces podrán formarse tres pirámides parecidas a un cono.

Entonces la relación entre prismas y pirámides de la misma base y altura puede extenderse al cilindro y cono de la misma base y altura. Y reflexionando en ello, ¿cuál es esa relación?

____

____

Finalmente, escribe una fórmula para el volumen del cilindro y otra para el volumen del cono; guíate por las relaciones que has trabajado en esta lección a partir de los prismas y pirámides obtenidos. También dibuja la figura y representa el volumen.

Volumen del cilindro: ________________

Volumen del cono: ________________

5 Utilizo lo que aprendí

1. Copia los siguientes ejercicios en hojas aparte y resuélvelos. Sugiere a tu profesor su revisión en el aula; esto te servirá como retroalimentación.

   a) Si el volumen de un cono es 343 m^3, ¿cuál es el del cilindro de la misma base y altura?

   b) Halla el volumen de cilindro cuyo radio de la base mide 2 cm y tiene una altura de 5 cm. Además, halla el volumen del cono con la misma base y altura.

   c) Determina el volumen de un cono de 3 cm de radio de la base y 9 cm de altura. Encuentra también el volumen del cilindro de la misma base y altura.

   d) Da con el área de la base y la altura de un cono en el cual la altura es el triple del radio de la base, sabiendo que el volumen del cono es 49 m^3.

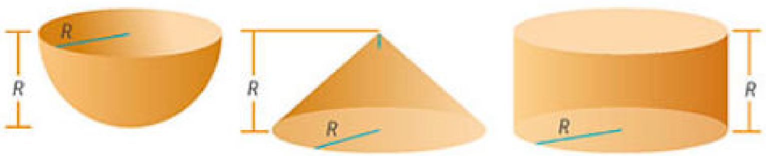
   e) Encuentra el volumen del cono resultado del giro de un triángulo rectángulo isósceles cuyo perímetro es de 122 cm y su base de 22 cm.

   f) Halla el área total del tronco de cono de revolución obtenido al cortar un cono de 15 cm de altura y 6 cm de radio de la base, con un plano distante 5 cm del vértice.

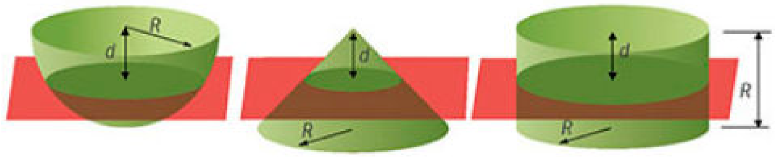
Conexión matemática

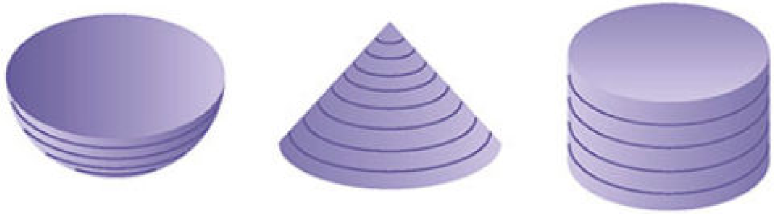
¿Es posible que el volumen de un cono de la misma base y altura que un cilindro tenga un volumen de la mitad de éste? Dejando el radio de la base fijo, ¿cuánto debería aumentarse la altura del cono para que su volumen fuera la mitad del área del cilindro?

g) Arquímedes dedujo la relación entre una semiesfera, un cono y un cilindro cuyas bases y alturas tienen la misma longitud que el radio de la esfera.

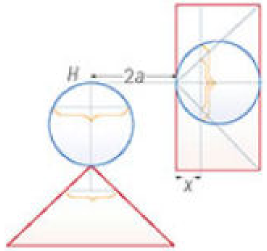


Esto lo comprobó imaginando que cada uno de estos cuerpos geométricos podía cortarse en rebanadas delgadas y entonces comparó si las áreas de éstas correspondían a las mismas alturas:





Luego se imaginó que dichas rebanadas podrían equilibrarse tal como se muestra en la figura, en una especie de balanza con el fiel en O.

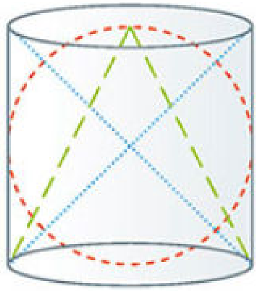


Así, se determina que:

volumen del cilindro = volumen de la semiesfera + volumen del cono

i) Argumenta por qué a partir de lo anterior pueden obtenerse relaciones entre los volúmenes de los cuerpos que se muestran.

h) Usa esta relación para encontrar el volumen de la esfera de radio R, a partir del volumen de un cono y un cilindro.



i) La circunferencia de la base de un cilindro mide 25.12 m y su altura es de 12 m. Halla el volumen del cilindro, la esfera del mismo radio de la base del cilindro y el cono de la misma base y altura que el cilindro.

j) La circunferencia de la base de un cono circular recto mide 12 m y su altura es de 10.5 m. Determina su volumen, el del cilindro de la misma base y altura y el de la esfera del mismo radio de la base.

k) Un cono tiene el radio de la base igual a la quinta parte de la altura. Si el volumen del cono es de 345 m^3. Encuentra el área de la base y la altura.

Aprende de los errores

Tu compañero te afirma que es posible que una esfera de radio R tenga un volumen igual a un cono y un cilindro con radio de la base y altura igual a R. ¿Su afirmación es verdadera o falsa? ¿Estarías de acuerdo o negarías lo que dijo?

Partes y totales de cilindros y conos

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Comienza a pensar

1. Reúnanse en parejas colaborativas para reflexionar y resolver la siguiente situación.

a) Se está diseñando un granero cuyo techo tiene forma cónica y su estructura es cilíndrica. El radio de la base del cono es casi el mismo que el del cilindro; es decir, 3 m.

i) ¿Qué altura debe tener el cono para que su volumen sea la sexta parte del volumen del cilindro? Primero piensen en un resultado posible y anótenlo:

____

ii) Ahora, expliquen qué consideran para obtener esa cifra: ______________

____

iii) Hagan los cálculos para encontrar la respuesta, explíquenlos en sesión grupal y compárenlos con los de otras parejas. Finalmente anoten sus conclusiones.

____

____

Analicemos juntos

1. Agrupados en tríos y guiados por el profesor, reflexionen los problemas y resuélvanlos.

a) Si el radio de la base de un cilindro se mantiene constante y el valor de la altura es el único que varía, ¿qué tipo de variación funcional se genera? ____

b) Consideren un cilindro de radio 5 cm y una altura que varía. Antes de hacer el cálculo a mano, con una calculadora u hoja electrónica, estimen el resultado y compárenlo con el valor obtenido

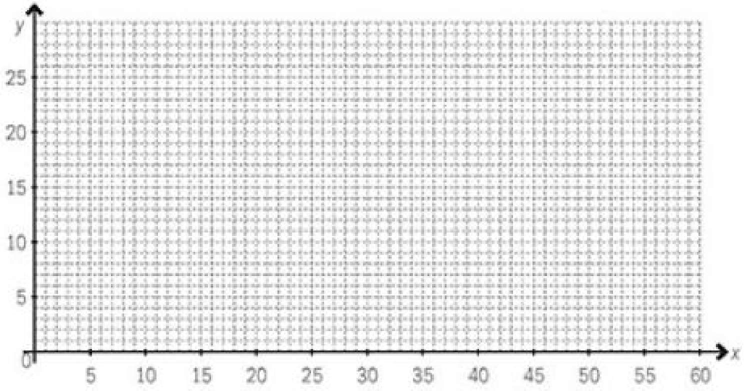
Altura	Cálculo	Estimación	Volumen
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
8.7			
9.2			

i) Compara tus estimaciones y resultados con los de otros tríos y anoten las estrategias que detectaron para hacer las estimaciones:

____

____

ii) Estimen cómo será la gráfica y hagan un bosquejo de ella, sin tabular.

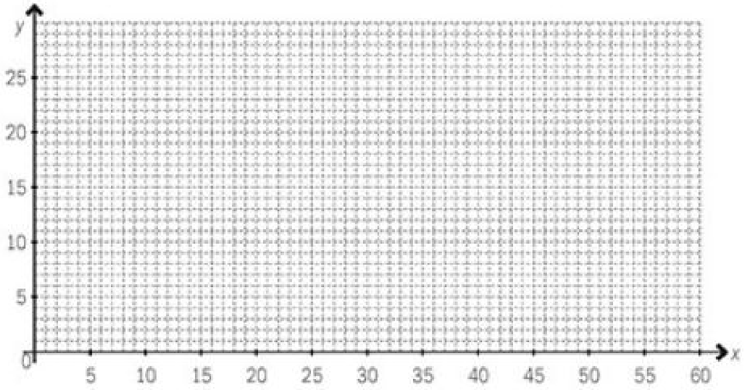


iii) Ahora tabulen con los valores estimados y grafíquenlos en el mismo espacio. Comparen la gráfica obtenida con la anterior.

iv) ¿Hubo similitudes o diferencias? Descríbanlas: ______________

____

v) ¿Cómo variaría la gráfica si hubieras graficado los volúmenes del cono con el mismo radio en la base? ______________
Hagan el bosquejo.



Aprende con tecnología

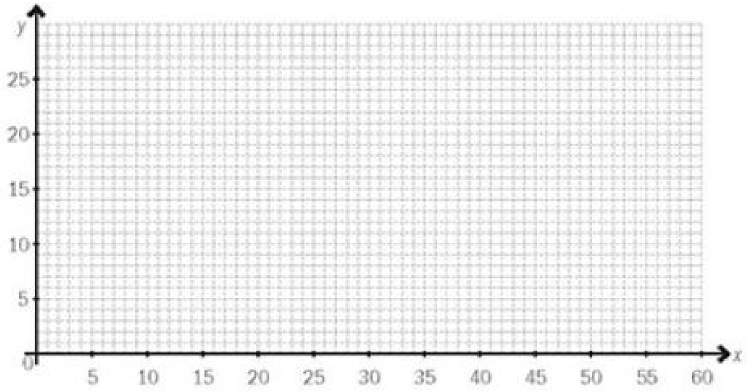
Para explorar los contenidos de los elementos de Euclides referidos a conos y cilindros visita el sitio web: http://goo.gl/IEZDY (consultado el 2 de diciembre de 2016).

3 ¿Adónde llegamos?

1. Es hora de intentarlo por tu cuenta. Analiza lo siguiente y responde.
   a) En esta ocasión, deja la altura del cilindro fija; por ejemplo, 5 cm. Entonces completa la tabla correspondiente. Antes de hacer el cálculo a mano, con una calculadora u hoja electrónica, estima el resultado y compara tus estimaciones con el valor obtenido:

Altura	Cálculo	Estimación	Volumen
1			
2			
3			
4			
5			
6.5			
7.9			
6.8			
8.3			
9.5			

ii) Estima cómo será la gráfica y haz el bosquejo correspondiente sin tabular.



ii) Ahora, en la misma gráfica, tabula con los valores de tus estimaciones y compara la gráfica con la anterior.

iii) Describe las diferencias que encuentras entre ambas gráficas: ____________

____

iv) ¿Cómo variaría la gráfica si hubieras registrando los volúmenes del cono con la misma altura? Haz un bosquejo en tu cuaderno.

v) ¿Qué relación hay entre las gráficas del cilindro y el cono? Explica tu respuesta: ____

____

4 Algo por aprender

1. En sesión grupal, lean y después, juntos, elaboren sus respuestas y anótenlas.

   a) Escribe la expresión para calcular el volumen de un cilindro y un cono de altura h y radio r:

Cilindro	
Altura (h)	
Radio (r)	

Cono	
Altura (h)	
Radio (r)	

   b) Si calculas el volumen de un cilindro con altura fija y variando el radio, ¿hay proporcionalidad entre los valores? ________ ¿Por qué? ______________

   ____

   c) Si calculas el volumen de un cilindro con radio fijo y variando la altura, ¿hay proporcionalidad entre los valores? ________ ¿Por qué? ______________

   ____

   d) Si calculas la altura de un cilindro con volumen fijo y variando el radio, ¿hay proporcionalidad entre los valores? ________ ¿Por qué? ______________

   ____

   e) Si calculas el radio de un cilindro con volumen fijo y variando el radio y la altura, ¿hay proporcionalidad entre los valores? ________ ¿Por qué? ______

   ____

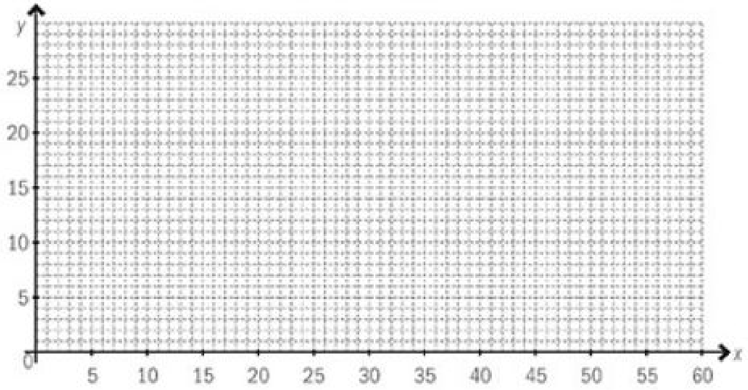
   f) ¿Las conclusiones hubieran sido diferentes si hubieras considerado un cono en vez de un cilindro? ________ ¿Por qué? ______________________

   ____

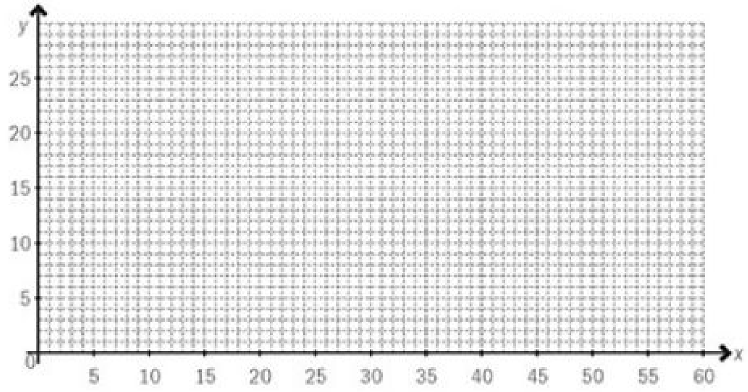
5 Utilizo lo que aprendí

1. En parejas, resuelvan los siguientes ejercicios.

   a) Discutan cómo sería la gráfica del cociente del volumen del cilindro entre el volumen del cono, manteniendo el radio constante y variando la altura. Regístrenla en la cuadrícula.



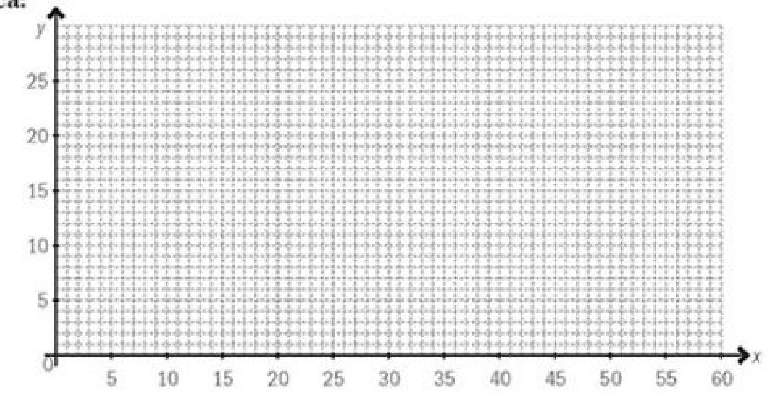
b) Ahora comenten cómo sería la gráfica del cociente del volumen del cilindro entre el volumen del cono, al mantener la altura constante y variar la longitud del radio.



c) Considerando la relación de Arquímedes entre los volúmenes de la semiesfera con el cono y el cilindro, completen la siguiente tabla. Encuentren también la relación funcional en cada caso y grafiquen la variación de cada uno de los volúmenes respecto al radio.

Radio	Volumen de la esfera	Volumen del cono	Volumen del cilindro
Relaciones funcionales	$y =$	$y =$	$y =$

Gráfica:



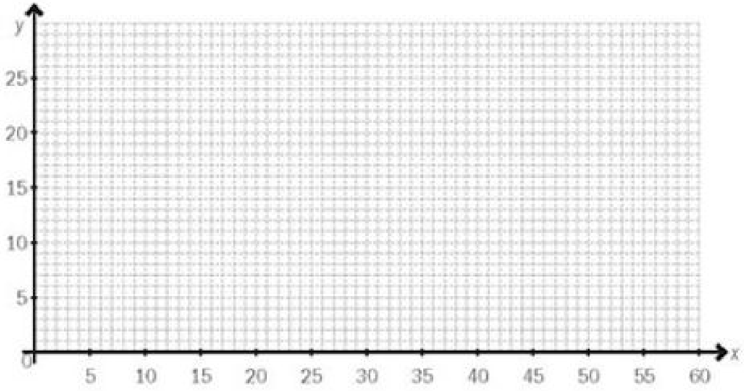
Aprende de los errores

Si un compañero asegura que dado que el volumen de un cilindro es el triple de un cono y si el radio del cilindro es el doble que el de un cono, entonces el volumen del cono es la sexta parte del volumen del cilindro. ¿Qué le comentarías respecto a la validez o falsedad de su afirmación?

2. Si la altura es el doble del radio, establezcan la relación funcional para el volumen del cono y el cilindro y compárenlas, tanto en la gráfica como en la expresión algebraica.

Radio	Volumen del cono	Volumen del cilindro
Relaciones funcionales	$y =$	$y =$

Gráfica:



3. Por tu cuenta, copia en hojas aparte los ejercicios a continuación y resuélvelos.

a) Si la altura es la tercera parte del radio, establece la relación funcional para el volumen del cono y el cilindro y compáralas, tanto en la gráfica como en la expresión algebraica. Es indispensable que tabules y grafiques.

b) Elabora una gráfica y establece una expresión funcional para los volúmenes de cilindros en los que su radio es constante y mide 8 m, y su altura siempre es mayor que 8 m.

c) Elabora una gráfica y encuentra una expresión funcional para los volúmenes de conos en los que su altura es 3 cm y su radio siempre es mayor que 5 cm.

d) Elabora una gráfica donde compares los volúmenes de prismas de base poligonal con 25 lados y un cilindro de radio igual a la apotema, que será de 2 cm.

e) Elabora una gráfica donde compares los volúmenes de pirámides de base poligonal con 30 lados y un cono de radio igual a la apotema, que será de 3 cm.

3 Proporcionalidad y funciones

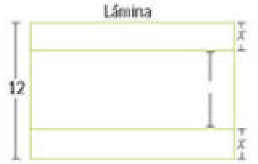
Regla del producto

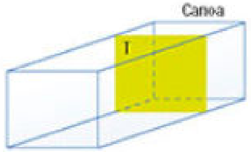
Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

1 Comienza a pensar

1. En parejas, lean, analicen y contesten lo que se solicita en la situación.

a) Con una lámina metálica rectangular de 12 pulgadas de ancho se pretende fabricar el armazón de una canoa doblando hacia arriba dos lados del mismo largo, de modo que sean perpendiculares a la lámina, como se muestra en la figura:





El volumen se maximiza cuanto mayor sea el área de cada una de las secciones transversales (T) de la canoa, como la que aparece de color amarillo.

i) Escriban una expresión que represente la medida de L, la cual representa la base de la canoa.
ii) Describan cómo establecieron las relaciones representadas en la expresión algebraica.
iii) ¿Utilizaron en la nueva expresión la obtenida en i)?________
¿De qué manera?________
iv) ¿Cuál variable depende de cuál? ________
Expliquen su respuesta: ________
v) Si T representa el área de la sección transversal de la canoa y x la longitud que será doblada, escriban una expresión que represente la relación entre ambas variables.

b) Completen la siguiente tabla sobre el área de la sección transversal. Luego, con base en los datos de la tabla contesten las preguntas posteriores.

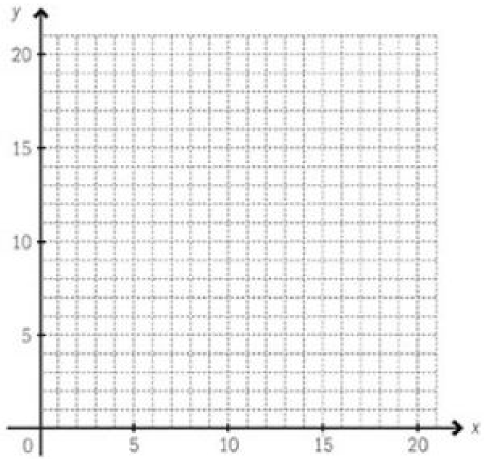
Alto de $T(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7
Base de la canoa L =	0							
Área de T =	0							

i) ¿Existen valores con los que se obtenga la misma área? ________ ¿Por qué? ________

c) Considerando T como y, tracen una gráfica utilizando los valores de la tabla para analizar el comportamiento de la situación. Así mismo grafiquen los valores obtenidos para L, también considerándola como los valores del eje y.

i) ¿La variación de x con respecto a L es lineal?________
¿Por qué?________
ii) ¿La variación de x con respecto a T es lineal?________
¿Por qué?________
iii) ¿Qué relación existe entre el tipo de expresión algebraica que representan y el hecho de que la variación sea o no lineal?________

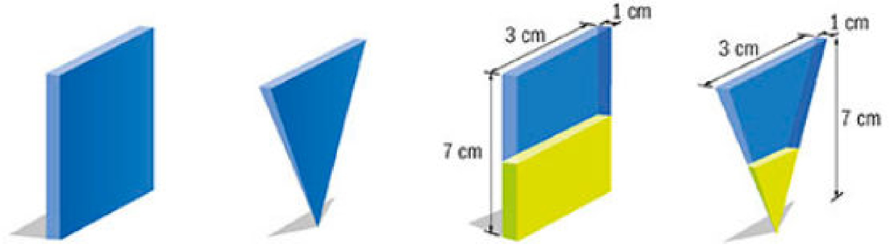
d) Respondan en su cuaderno las preguntas.
i) ¿Cuántas pulgadas deben doblarse para que la canoa tenga su mayor capacidad? ¿Cómo lo obtuviste?
ii) ¿Qué valor tiene L en el momento en que T está en su máximo? Redacta una conclusión acerca de esta situación.
iii) ¿Qué sucede en 7? ¿Es posible este resultado? ¿Por qué?



2 Analicemos juntos

1. En equipos, comenten lo siguiente y respondan.

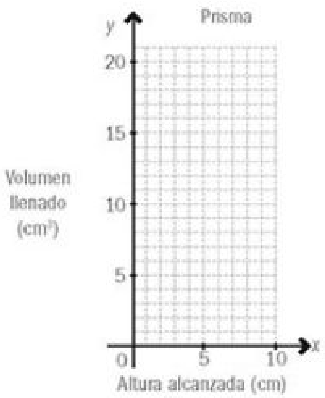
a) Se preparan diversos objetos decorativos, uno con forma de prisma y otro de pirámide; ambos serán rectangulares delgados y con la misma base y altura.
i) ¿Qué relación hay entre el volumen del prisma y el de la pirámide? Explíquenlo: ________
Se piensa llenarlos de arena o líquido de varios colores y densidades, si la altura del prisma de 7 cm y el ancho es de 3 cm y la profundidad es de 1 cm.
ii) ¿Cuál será el valor del volumen del prisma? ________
¿Y el de la pirámide?________
iii) Escribe la expresión que represente el volumen que se llena en el prisma a una altura h: ________ ¿Cómo la obtuvieron? ________
iv) Escribe la expresión que represente el volumen que se llena en la pirámide a una altura h: ________ ¿Cómo la obtuvieron? ________



3 ¿Adónde llegamos?

1. Analiza el planteamiento y resuelve las actividades. Al término y guiados por el profesor, compartan y discutan sus respuestas.

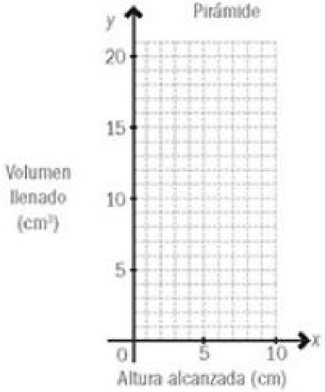
 a) Completa la siguiente tabla que compara el volumen del llenado del prisma y la pirámide a medida que el líquido avanza en altura h. Después grafica las variaciones en el volumen del prisma.



Altura h (cm)	Volumen llenado en el prisma (cm³)	Volumen llenado en la pirámide (cm³)
1	3	0.14
2		
3		
4		
5		
6		
7		

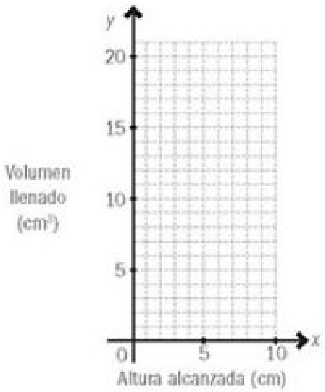
 i) En este caso, ¿la variación del volumen respecto a la altura fue lineal? ______ ¿Por qué? ______________________

 b) Ahora, representa en la gráfica izquierda las variaciones en el volumen de la pirámide.



 i) ¿La variación del volumen de la pirámide respecto a la altura fue lineal? ______ ¿Por qué? ______________________

 c) Compara ambas gráficas en el plano.



 i) Con base en la gráfica, ¿en algún caso se utiliza siempre más material de relleno? ______ ¿En cuál? ______

 ii) ¿En cuál caso puede decirse que hay más variación del volumen respecto a la altura? ______________________

 iii) Si calculas la razón de cambio, ¿en alguno de los casos es constante? ______ ¿Por qué? ______________________

 d) Si se desea rellenar cada objeto con un color a la mitad de su altura y con otro en la parte superior…

 i) ¿Cuánto material se requeriría en cada caso para el primer color? ______________________

 ii) ¿Y cuánto en cada caso para el segundo color? ______________________

4 Algo por aprender

Sabemos que una ecuación cuadrática o de segundo grado es una expresión del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$.

Éstas pueden ser completas o incompletas dependiendo de los valores de a, b y c, y pueden llevar a soluciones reales o complejas, es decir, los valores de x independientemente del dominio numérico al que pertenezcan, están fijos y determinados.

Llamamos función cuadrática a la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, o bien, $y = ax^2 + bx + c$, donde x es la variable independiente y y o $f(x)$ la variable dependiente. La gráfica de la función cuadrática es una parábola cuya posición depende de los valores de los coeficientes a, b y c, también llamados parámetros de la función.

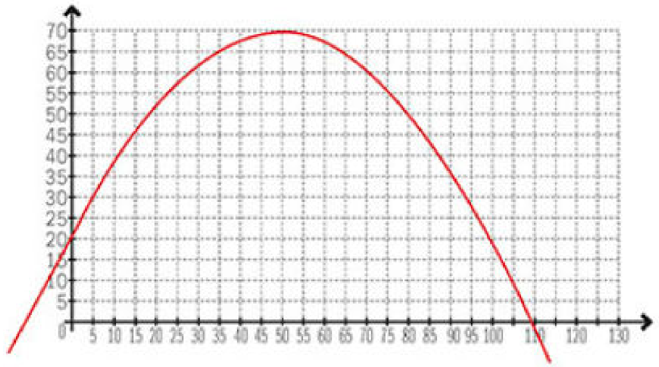
Para ejemplificar lo anterior, analicemos:

Un laboratorio de una empresa ganadera estudia los efectos nutricionales sobre sus conejos: éstos fueron alimentados con una serie de preparados que contenían 10% de proteína, principalmente zanahorias y maíz. Al variar el porcentaje (p) de zanahoria en la mezcla de proteína se estimó que el peso promedio ganado (en gramos) de un conejo en un cierto periodo fue de $f(p)$, donde:

$$f(p) = -\frac{1}{50}p^2 + 2p + 20$$

Y donde $0 \leq p \leq 100$

Como se puede observar, la función es cuadrática y su gráfica es la siguiente:



Si deseamos conocer algún valor específico de una función cuadrática podemos hacerlo por medio de la inspección de su gráfica, pero el procedimiento más exacto es por medio de una ecuación obtenida de la función. Por ejemplo, queremos saber en qué valor o valores de p, el peso ganado es de 45.5 gramos. De esta manera, tenemos que:

$$f(p) = -\frac{1}{50}p^2 + 2p + 20$$

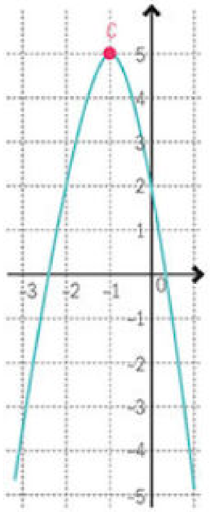
$$\text{de donde } -\frac{1}{50}p^2 + 2p - 25.5 = 0$$

$$\text{o bien } -0.02p^2 + 2p - 25.5 = 0$$

Resolvemos la ecuación por medio de la fórmula general:

$$p = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-0.02)(-25.5)}}{2(-0.02)}$$

en donde los resultados son $p_1 = 15$ y $p_2 = 85$.



El procedimiento anterior aporta información valiosa y útil para el manejo de la función cuadrática; y dicho sea de paso, indaga sobre el procedimiento algebraico necesario para poder afirmar que las coordenadas del vértice de una función cuadrática en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, son $v\left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$, lo cual es muy útil obtener cuando es necesario explorar situaciones de optimización, como en algunos ejemplos que hemos analizado a lo largo de este bloque, en los que se pregunta por el área máxima, la ganancia máxima o la menor pérdida. Veamos el ejemplo:

Dada la función $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$

$$v\left(\frac{-(-6)}{2(-3)}, 2 - \frac{(-6)^2}{4(-3)}\right)$$

$$v\left(\frac{6}{-6}, 2 - \frac{36}{-12}\right)$$

$$v(-1, 5)$$

Aprende con tecnología

Para explorar más sobre el tema de variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades en otras áreas del conocimiento a partir de breves conceptos, videos y ejemplos, visita el sitio de internet: http://goo.gl/PwYjN (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Utilizo lo que aprendí

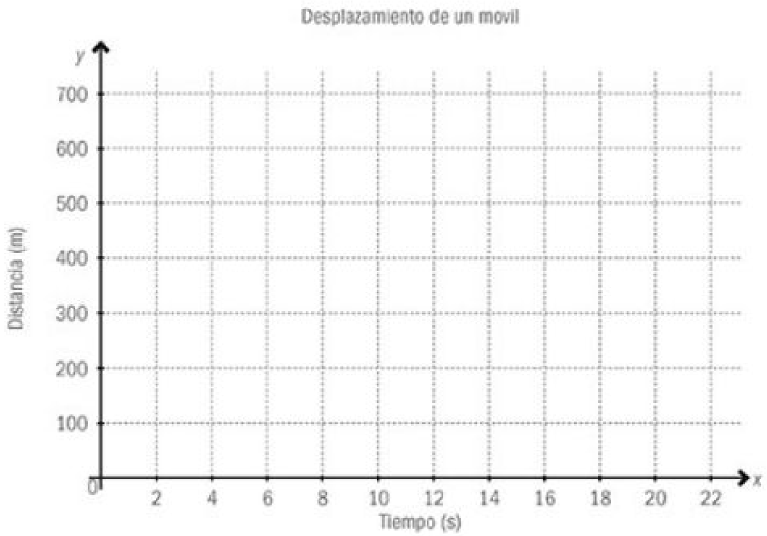
1. Analiza los ejercicios y respóndelos. Sugiere a tu profesor su revisión con el grupo para obtener retroalimentación.

a) Determina el punto en el cual el peso promedio ganado (en gramos) del conejo presentado en la sección anterior fue el máximo. Registra tus operaciones.

b) La expresión $d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ se utiliza para conocer el comportamiento de un movimiento rectilíneo. En este caso, d es la distancia recorrida por un móvil que parte con una velocidad inicial v_0, aceleración (a), en un tiempo (t) forma una tabla como la siguiente, en la que se analiza el desplazamiento de un móvil respecto al tiempo, suponiendo además que éste parte del reposo (V_0=0 m/s) y su aceleración permanece constante en 3 m/s^2.

Tiempo (segundos)	Distancia (metros)

i) Construye la gráfica que corresponda al fenómeno. Guíate por la que se presenta a continuación.



ii) ¿Qué sucederá si se incrementa el valor de la aceleración (un número mayor que 3), pero se mantiene constante? __________

iii) ¿En este caso, la gráfica estaría por arriba o por debajo de la anterior?

____

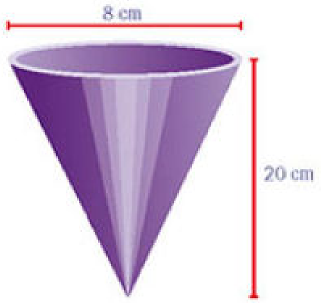
iv) ¿Qué sucederá si disminuye la aceleración (un número menor que 3)?

____

v) ¿La gráfica estaría por arriba o por debajo de la anterior?

____

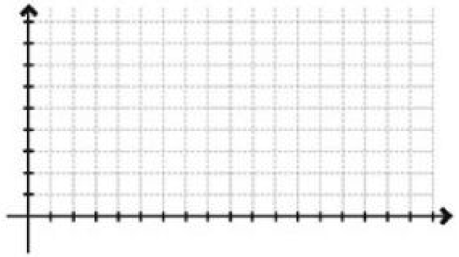
c) El siguiente cono tiene una base con diámetro 8 cm y una altura de 20 cm y se comienza a llenar de agua.



i) Completa la siguiente tabla respecto a las dimensiones que se muestren en el cono conforme suba el agua, iniciando desde el vértice:

Altura del agua (x) en cm	Radio de la sección cónica que se forma en la superficie del agua	Área de la sección cónica que se forma en la superficie del agua	Volumen de agua
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

ii) Ahora grafica en un mismo plano los valores correspondientes a las tres columnas que varían respecto a la altura que alcanza el agua en el cono.



iii) ¿Cuál de los tres crecimientos es líneal? ________________ ¿Por qué?
____
____

iv) ¿Cuál es cuadrático? ____________ ¿Existe uno de otro tipo? _____

v) ¿De que tipo es? ______________________________________

4 Nociones de probabilidad

Juegos equiprobables y no equiprobables

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Comienza a pensar

1. Integrados en equipos de cuatro personas, desarrollen el siguiente juego.

a) ¡Listos para jugar! Cada quien debe elegir tres números entre el 1 y el 12. Después lanzarán dos dados de seis caras y sumarán los puntos que salgan. Cada que resulte la suma correspondiente, deben colocar una marca.

El primero en obtener 10 marcas con alguno de sus tres números elegidos gana el juego.

Jueguen un par de veces hasta llegar a 10 marcas.

10												
9												
8												
7												
6												
5												
4												
3												
2												
1												
Tirada ⇧ Suma ⇨	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

i) ¿Da lo mismo elegir cualquiera de tres números del 1 al 12, o hay números que convienen más? ____________________________

ii) ¿Cuál o cuáles sumas son las que más conviene elegir? ______ ¿Por qué?
____

iii) ¿Cuál o cuáles sumas son las que menos conviene elegir? ____ ¿Por qué?
____

iv) Al cambiar las reglas, el número de jugadores o hacer alguna modificación, ¿es posible que este juego se vuelva justo para cualquier jugador? ________ ¿Cómo lo harías? ______________________________
____

Analicemos juntos

1. En parejas colaborativas debatan y contesten lo que se pide.

a) Jorge y su amigo Pedro han diseñado el siguiente tablero para jugar a lanzar dos dados.

2		8
3		9
4	7	10
5		11
6		12

El juego se lleva a cabo entre dos oponentes de tal forma que uno de los contrincantes debe elegir los números menores (2, 3, 4, 5 y 6) y el otro los mayores (8, 9, 10, 11 y 12).

Si al lanzar dos dados sale una suma de los números menores o mayores, quien o quienes hayan elegido dichos números obtienen dos puntos; pero si sale el siete ambos reciben un punto.

b) En parejas, jueguen al menos un par de veces, haciendo 10 tiradas en cada juego. Al término contesten:

i) ¿Con cuál grupo de números tienes más probabilidades de ganar, con el de menores o con el de mayores? __________ ¿Por qué? __________
____
____

ii) ¿Consideras que este juego es justo para ambos contrincantes? _______
¿Por qué? ______________________________________
____

iii) ¿Al elegir cualquier otro número en vez del siete para dar un punto a cada equipo, sigue siendo un juego justo? ____________________
¿Por qué? ______________________________________
____

¿Adónde llegamos?

1. Agrupados en cuartetos, observen las siguientes ruletas y luego contesten lo solicitado.

Juego 1. Cada uno de los cuatro jugadores debe elegir un número del 1 al 4.

Juego 2. Cada uno de los cuatro jugadores debe elegir un número del 1 al 4.

a) ¿En ambas ruletas el juego es justo para los cuatro participantes? ________
¿Por qué? ______________________________________
____

b) En la ruleta del Juego 1, ¿qué número tiene mayores probabilidades de ganar?
__________ ¿Por qué? ____________________________
____

c) En la ruleta del Juego 2, ¿qué número tiene mayores probabilidades de ganar?
__________ ¿Por qué? ____________________________
____

Algo por aprender

Recuerda que cuando hacemos un experimento aleatorio, puede haber varios resultados. A cada uno de éstos se le denomina **suceso simple o elemental**.

El conjunto de todos los sucesos elementales constituye el espacio muestral asociado al experimento aleatorio.

En el lanzamiento de un dado, los sucesos elementales son seis:

obtener 1	obtener 4
obtener 2	obtener 5
obtener 3	obtener 6

El espacio muestral es: e = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

En algunos experimentos aleatorios, ocurre, dada su simetría, que podemos suponer que los sucesos elementales de que consta el espacio muestral tienen la misma probabilidad; dicho de otra forma, son **equiprobables.**

En estos casos la **probabilidad** de cada suceso elemental es:

$$P\,(\text{suceso elemental}) = \frac{1}{\text{número de sucesos elementales de } E}$$

Para saber si un juego es justo debe calcularse la probabilidad teórica o clásica del evento que interviene en el juego.

Aprende con tecnología

Para conocer y practicar más acerca de juegos equiprobables y no equiprobables mediante ejemplos, actividades y desde luego, versiones de los conceptos que ayudarán a reforzar tu conocimiento, explora el sitio de internet: http://goo.gl/2arwB (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Por ejemplo, si en un juego seis personas eligen uno de los seis resultados de un dado y deciden qué ganará quien obtenga el número que eligió, este juego es justo, pues está basado en eventos equiprobables.

En otro ejemplo, un chico lanzó una moneda 35 veces al aire; cada cinco lanzamientos anotó la frecuencia absoluta.

Águila	2	3	3	1	3	4	1
Sol	3	2	2	4	2	1	4

Por cada serie de 5 lanzamientos, se calcula la frecuencia relativa y se obtiene la siguiente información relacionada con obtener águila en los 5 lanzamientos.

Águila	0.4	0.6	0.6	0.2	0.6	0.8	0.2

La siguiente gráfica muestra las frecuencias relativas por cada serie de 5 lanzamientos.

Cuando se acumulan los lanzamientos y se calcula la **frecuencia relativa acumulada,** esto es el primer valor corresponde a los 5 primeros lanzamientos, el segundo a 10, el tercero a 15 y así de manera sucesiva, la tabla que se obtiene para el resultado de que caiga águila es:

Águila	0.4	0.5	0.5333	0.45	0.48	0.5333	0.3778

Y la gráfica correspondiente es:

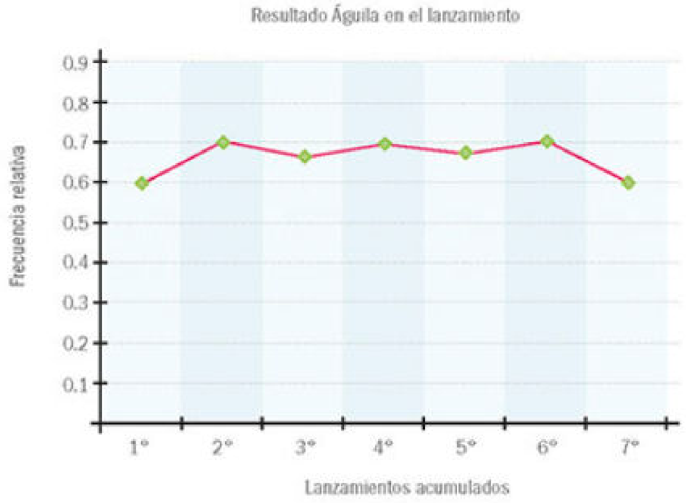
En la gráfica puedes observar que la frecuencia relativa de águila varía cerca de 0.5, lo cual es un valor que se espera para una moneda, porque desde el enfoque de la probabilidad clásica, la probabilidad de obtener águila al lanzar una moneda es 0.5.

Si las frecuencias relativas acumuladas fueran las siguientes:

Águila	0.6	0.7	0.6667	0.7	0.68	0.7	05111

a) Quedarían más aproximadas a 0.7. Reflexiona y concluye: ¿es éste el comportamiento que se espera de una moneda legal? ________ ¿Por qué? ____
____

Observa la siguiente gráfica.



i) ¿Cuántos lanzamientos serían suficientes para saber si la moneda es legal o no? _______________________________

Utilizo lo que aprendí

1. Analiza y resuelve las siguientes actividades. Puedes sugerir a tu profesor que se comenten y revisen en sesión grupal, para despejar dudas.

a) Antonio y Andrés juegan a los volados con un par de monedas.

i) ¿Cuáles serán los resultados posibles al lanzar dos monedas si éstas son legales?

____

ii) ¿Cuál debería ser la probabilidad de obtener dos soles?

iii) ¿Es un juego justo el que un jugador elija obtener dos soles y el que su oponente elija obtener dos águilas? __________ ¿Por qué? __________

____

b) Un amigo te propone jugar a lanzar dos dados de seis caras cada uno. Cada quien lanzará los dados alternativamente. Después de 25 veces de hacer lanzamientos si la diferencia de puntos, tomando el resultado de cada uno de los dados, es 0, 1 o 2, tu amigo gana si dicha diferencia es 3, 4 o 5.

i) Haz tu tabla de frecuencias:

ii) ¿Quién tiene más posibilidades de ganar en más ocasiones?

iii) ¿Es un juego justo para ambos contrincantes? __________ ¿Por qué?

____

c) En la actualidad no todos los dados son cubos; los hay de varias formas.

El dado de...

cuatro caras es un tetraedro regular.
seis caras es un hexaedro regular (un cubo).
ocho caras es un octaedro regular.
doce caras es un dodecaedro regular.
veinte caras es un icosaedro regular.
diez caras es un trapezoedro pentagonal.

i) ¿Cuál es el espacio muestral E del dado con forma de tetraedro?

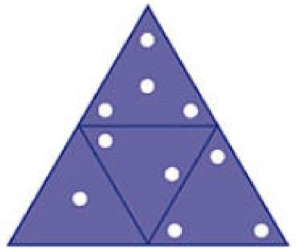
____

ii) ¿Cuál es el espacio muestral E del dado con forma de un dodecaedro?

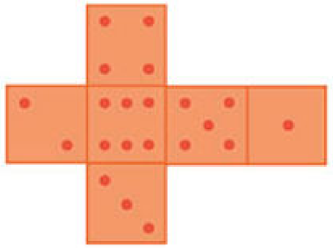
____

d) Considerando que tres jugadores utilizarán tres dados, con forma de cubo (hexaedro), de tetraedro y de dodecaedro, cuáles de los siguientes juegos son justos y cuáles no. Justifica tus respuestas en todo momento.

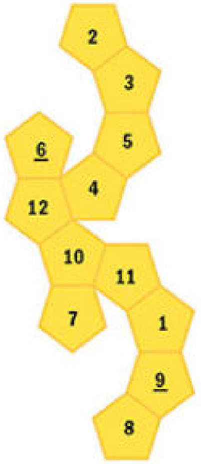
Jugador 1



Jugador 2



Jugador 3



Juego 1

Gana quien obtenga un número par al tirar su dado. ¿Es un juego justo o no?
________ ¿Por qué? ______________________________

____

Juego 2

Gana quien obtenga el número 1 al tirar su dado. ¿Es un juego justo o no?
________ ¿Por qué? ______________________________

____

Juego 3

Gana quien obtenga un múltiplo de 3 al tirar su dado. ¿Es un juego justo o no?
________ ¿Por qué? ______________________________

____

e) En parejas redacten al menos dos juegos justos en los que participen los tres jugadores, cada uno con su tipo de dado. ______________

____

____

f) Si un jugador utiliza los dados con forma de tetraedro y de hexaedro, y otro jugador el de forma de dodecaedro, redacten un juego que sea justo para dichas condiciones. ______________

____

____

Prueba tipo PISA

I La cuenta de la comida

Después de su partido, el equipo de basquetbol fue a comer mariscos. Al pagar, los ocho integrantes se repartieron una cuenta de $1 200, pero tres pagaron $50 menos.

1. Elije la ecuación que resuelve el problema.
   a) 22 b) 25 c) 26 d) 29

2. El siguiente domingo el equipo fue a comer otra vez, ahora cocteles de fruta, y la cuenta fue de $450. Esta vez tres integrantes del equipo pagaron $50 menos que los demás. De quienes pagaron una cuota mayor, ¿cuánto aportó cada uno? __________ pesos.

II Cuerpo de revolución

Los cuerpos geométricos que se generan al hacer girar una figura geométrica sobre un eje reciben el nombre de cuerpos de revolución. Estos cuerpos son diferentes de los poliedros porque tienen al menos una cara curva y pueden o no tener caras planas.

Material para el experimento: cartulina, regla, plumón, popote, cinta adhesiva y tijeras.
Instrucciones: en la cartulina dibuja la mitad de un triángulo, recórtalo y pégalo con la cinta adhesiva al popote. Ahora tómalo entre tus manos y gíralo.

3. A partir del experimento revisa si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa; escribe V o F en el paréntesis.
   a) Al girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos, la hipotenusa del triángulo genera un cono. ( )
   b) El eje alrededor del cual giró el triángulo recibe el nombre de eje del cono. ( )
   c) El eje de giro no coincide con la altura del cono. ( )
   d) La hipotenusa que genera al cono se llama generatriz. ( )

4. Si en vez de un triángulo, se utiliza un cilindro, ¿qué figura se genera al girar el popote?

   ____

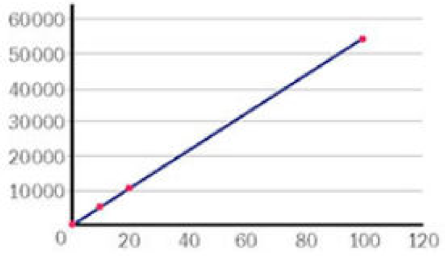
5. Uno de los equipos recortó su triángulo con las siguientes medidas para los catetos 5 cm y 10 cm, ¿qué volumen tendrá el cono que generaron?
   a) 785.3 cm³ b) 261.7 cm³ c) 83.3 cm³ d) 3.81 cm³

6. Para la segunda parte de la práctica, los alumnos debían conseguir un cilindro del material de su elección. Así, el equipo de Diana consiguió un cilindro con un volumen de 198 cm³ y el radio de 3 cm. ¿Cuánto mide la altura del cilindro?
   a) 66 cm b) 21 cm c) 14 cm d) 7 cm

II Gráfica de energía

Los datos experimentales pueden ser representados en una gráfica y con esto tener información visual muy rápida de cómo se relacionan las magnitudes. Alicia quiere aplicar lo anterior con una de sus actividades favoritas: escalar. Es importante saber que ella pesa 55 kg, escalará una montaña de 100 m de altura y que cada cierta altura calculará la energía potencial (energía potencial = masa × gravedad × altura) que tiene.

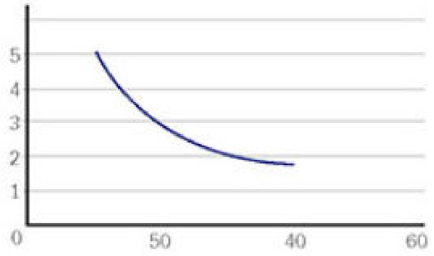
Altura (m)	Energía potencial (J)
0	0
10	5 390
20	10 780
100	53 900



7. Escribe V o F en el paréntesis. Si observamos la gráfica que obtuvo Alicia, podemos darnos cuenta de que:
   a) La gráfica que se tiene es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas. ( )
   b) Si la altura se dobla, la energía disminuye también el doble. ( )
   c) Si la altura se multiplica por 10, también la energía lo hace. ( )
   d) Conforme la altura crece en la recta, la energía potencial no crece de manera constante. ( )

8. Alicia ahora cambiará el problema; quiere fijar la energía potencial (así como en la primera parte mantuvo fija la masa). Supone que tiene cuerpos de masas comprendidas entre 10 y 100 kg; a partir de estas calculará a qué altura debe estar cada uno de ellos para tener una energía potencial de 1 000 J.

Masa (kg)	Altura (m)
25	4.08
50	2.04
75	1.36
100	1.02



Escribe V o F en el paréntesis. Si observas los datos comprobarás que:
   a) A más masa se necesita menos altura para que la energía potencial sea constante. ( )
   b) Para el doble de masa, hace falta la mitad de la altura. ( )
   c) Para tres veces más masa es necesario tres veces menos. ( )
   d) La gráfica correspondiente es una curva creciente. ( )

Ponte a prueba

I Lee con atención cada uno de los problemas que a continuación se presentan y elige la respuesta que consideres correcta.

1. ¿Cuál de las siguientes opciones es solución de la ecuación lineal $3x + 2y = 17$?

a) $x = 1, y = 5$ b) $x = 17, y = 17$ c) $x = 3, y = 2$ d) $x = 5, y = 1$

2. Determina el sistema de ecuaciones correspondiente y encuentra la cantidad de mascotas que tiene Pedro y la que tiene Kala. Entonces, el doble de mascotas de Pedro más el triple de mascotas de Kala suman 14, y el triple de mascotas de Pedro más el cuádruple de mascotas de Kala suman 19.

a) El sistema de ecuaciones es:
$2x + 3y = 14$
$3x + 4y = 19$
Pedro tiene una mascota y Kala cuatro

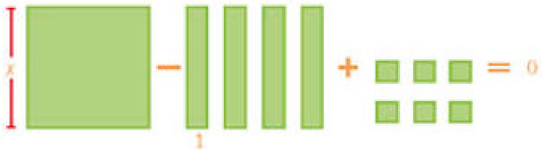
b) El sistema de ecuaciones es:
$2 + x + 3 + y = 14$
$3 + x + 4 + y = 19$
Pedro tiene 14 mascotas y Kala 19

c) El sistema de ecuaciones es:
$2x + 3y = 14$
$4x + 3y = 19$
Pedro tiene una mascota y Kala cuatro

d) El sistema de ecuaciones es:
$2x + 3y = 14$
$3x + 4y = 19$
Pedro tiene cuatro mascotas y Kala una

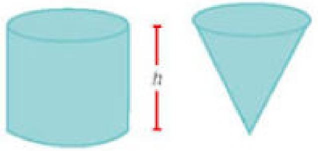
3. ¿Cuál es la ecuación de segundo grado para el arreglo y cuál es su solución?

a) $x - 5 + 6 = 0 \quad x = -1$
b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x_1 = 3, x_2 = 2$
c) $x^2 - 5 - 6 = 0 \quad x = \sqrt{1}$
d) $x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x_1 = 0, x_2 = 6$



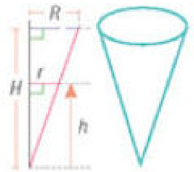
4. Un cilindro y un cono tienen la misma altura. Si el volumen del cilindro es menor que el del cono, ¿cuál de las opciones de tamaños de radios pueden tener ambos?

a) Radio cilindro = 1 cm / radio cono = 2 cm
b) Radio cilindro = 2 cm / radio cono = 2 cm
c) Radio cilindro = 3 cm / radio cono = 2 cm
d) Radio cilindro = 4 cm / radio cono = 5 cm



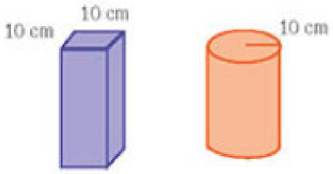
5. El radio de un cilindro es de 10 cm ($R = 10$ cm) y su altura igual a 1 m ($H = 1$ m). Si se hace un corte horizontal a una altura de 20 cm ($h = 20$ cm), ¿qué radio (r) tiene el círculo que se obtiene?

a) 10 cm
b) 5 cm
c) 3 cm
d) 2 cm



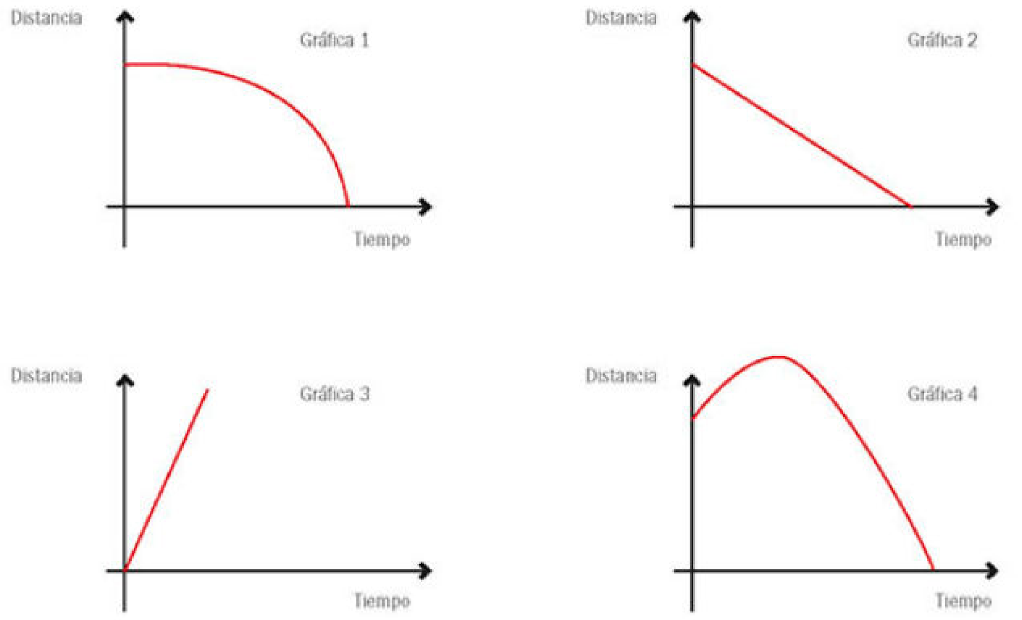
6. Un florero en forma de prisma rectangular está lleno de agua. Si se vacía toda el agua en el florero cilíndrico, cuya altura es idéntica a la del prisma, ¿qué sucederá?

a) El agua en el florero cilíndrico se derrama.
b) El florero cilíndrico se llena completamente sin derramar una gota de agua.
c) El florero cilíndrico se llena aproximadamente en una tercera parte.
d) El florero cilíndrico se llena de agua justo a la mitad.



7. De un árbol, cae un mango que ya estaba suficientemente maduro. ¿Cuál de las siguientes gráficas describe la posición del mango en su caída?

El desplazamiento de caída libre está dado por la ecuación $d = -\frac{1}{2}gt^2$, donde d es la distancia, g la gravedad y t el tiempo.



a) Gráfica 1 b) Gráfica 2 c) Gráfica 3 d) Gráfica 4

8. Sonia, Tere y Alex metieron en una caja todas las letras que forman la palabra *matemáticas*. Sonia gana si la primera letra que se extraiga de la caja es una *m* o una *t*; Tere será la ganadora si la primera letra extraída de la caja es la letra *a*. Y si sale una vocal diferente de la *a*, entonces Alex será el ganador. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

a) Tere, Sonia y Alex.
b) Sonia, Tere y Alex.
c) Sonia, Alex y Tere.
d) Alex, Tere y Sonia.

Bibliografía

Bibliografía recomendada para el alumno

Bosch, Carlos y Claudia Gómez, *Una ventana a las incógnitas*, México, SEP-Santillana, 2002 (Biblioteca del aula).

Cerasoli, Anna, *Los diez magníficos*, México, SEP-Ediciones Maeva, 2005 (Biblioteca del aula. Serie Espejo de Urania).

De la Peña, José Antonio, *Geometría y el mundo*, México, SEP-Santillana, 2002 (Biblioteca juvenil ilustrada).

__________, *Números para contar, medir, crear y soñar*, México, SEP-Santillana, 2006 (Biblioteca del aula. Serie Astrolabio).

De Ruiz, Concepción y Sergio de Régules, *Crónicas algebraicas*, México, SEP-Santillana, 2002 (Biblioteca del aula).

Gonick, Larry & Woollcott Smith, *La estadística en cómic*, Barcelona, Zendrera Zariquiey, 2002.

Moreno Castillo, Ricardo y José M. Vegas

Montaner, *Una historia de las matemáticas para jóvenes, desde la antigüedad hasta el renacimiento*, Madrid, Nivola, 2006.

__________, *Una historia de las matemáticas para jóvenes, desde el renacimiento a la teoría de la relatividad*, Madrid, Nivola, 2008.

__________, *Una historia de las matemáticas para jóvenes, historia de las ecuaciones*, Madrid, Nivola, 2010.

Newman, James R., *El mundo de las matemáticas*, Tomos 1- 5, Madrid, Grijalbo, 1968 (Colección Sigma).

Perelman, Yakov, *Matemáticas recreativas*, México, SEP-Santillana, (Biblioteca del aula. Serie Espejo de Urania).

Perero, Mariano, *Historia e historias de las matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

Sagan, Carl, *Cosmos*, España, Planeta, 1999.

SEP, *Fichero de actividades didácticas*, México, EMAT. Educación secundaria, 2000.

__________, *Geometría dinámica*, México, EMAT. Educación secundaria, 2000.

__________, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*, México, EMAT. Educación secundaria, 2000.

Villagrá, María del Rosario y Ana Villagrá, *Atlas básico de matemáticas*, México, Parramón, 2010.

Sitios de internet sugeridos para el alumno

Funciones cuadráticas
www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas.html

Probabilidad
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_5.html

Círculo y circunferencia
www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/circulos.html

Trigonometría
http://www.ematematicas.net/trigonometria.php

Ecuaciones cuadráticas sencillas
http://www.profesorenlinea.com.mx/matematica/Ecuaciones_Seg_grado.html

Factorización: *¡Vamos a factorizar!*
http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/article-110456.html

(Consultado el 2 de diciembre de 2016)

Bibliografía recomendada para el profesor

Chamoso, José María, Inmaculada Fernández y María Encarnación Reyes, *Burbujas de arte y matemáticas 6. Diálogos de Matemáticas*, Madrid, Nivola, 2009.

__________, Beatriz Graña, Mercedes Rodríguez, Julio Zárate, *Matemáticas desde la prensa. Diálogos de Matemáticas 4*, Madrid, Nivola, 2005.

__________, María José Cáceres, Pilar Azcárate y José Ma. Cardeñoso, *Organizando la estadística. Diálogos de Matemáticas 5*, Madrid, Nivola, 2007.

Casanova, María, *Evaluación educativa*, México, SEP-Muralla, 1998 (Biblioteca para la Actualización del Maestro).

Comité Interamericano de Educación Matemática, *Temas selectos de educación matemática*, México, Ángeles Editores, 2007.

Courant, Richard y Herbert Robbins, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, FCE, 2002.

Gómez Chacón, Inés, *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*, Madrid, Narcea, 2000.

Hitt, Fernando, *Funciones en contexto*, México, Prentice Hall, 2002.

Klein, Felix, *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, Madrid, Nivola, 2006 (Colección Ciencia abierta).

Mancera, Eduardo, *Errar es un placer*, México, GEI, 2001.

__________, *Matematebloquematica: el arte de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos*, México, GEI, 2001.

__________, *Saber matemáticas es saber resolver problemas*, México, GEI, 2001.

Penalva, María del Carmen, Isabel Escudero y David Barba, *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de matemáticas*, Madrid, 2006.

Rivaud, Juan José (Comp.), *Matemáticas para todos*, México, Fondo Mexicano para la Educación y el Desarrollo, 2003.

SEP, *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas*, México- SEP, Educación Secundaria, 2000.

Fonseca Cárdenas, Ma.Teresa, Demetrio Garmendia, María del Rosario Licea y Eduardo Mancera, *Pisa en el Aula*, México, INEE, 2008.

Sitios de internet sugeridos para el profesor

Colegio Nacional de Matemáticas.
http://www.campusdelasmatematicas.com
Apoyo pedagógico y recursos didácticos para los maestros de matemáticas de parte de una comunidad de especialistas

Ministerio de Educación, Gobierno de España.
http://www.mecd.gob.es/portada-mecd/
Recursos interactivos de matemáticas

National Council of Teachers of Mathematics.
http://www.nctm.org/
Apoyo para los profesores de matemáticas que desean iniciar sus clases o mejorarlas

REDEMAT, recursos de matemáticas.
http://www.recursosmatematicos.com/
Red de sitios didácticos de matemáticas, con contenidos clasificados por temas útiles para los profesores; actividades descargables con ejercicios orientados a los alumnos

Revista de investigación en Didáctica de las Matemáticas.
http://www.sinewton.org/numeros
Trabajos de orientación e interés para los profesores de educación secundaria

Revista Mexicana de Investigación Educativa.
http://www.comie.org.mx/v4/
Artículos de investigación educativa en todas las áreas

Secretaría de Educación Pública.
http://www.gob.mx/sep
Acceso a los programas y documentos oficiales de la SEP

Texas Instruments.
http://education.ti.com/
Recursos interactivos de matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional.
http://miayudante.upn.mx/
Auxiliar didáctico de matemáticas

Bibliografía consultada

Basurto, Eduardo, "Conceptualización y diferenciación de parámetros y variables a través de un entorno tecnológico dinámico", en *Memorias de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Brasil, 2011.

Basurto, Eduardo y Aurora Gallardo, "La nada llena en la búsqueda de lo desconocido", en *Correo del maestro*, 2010.

Courant, Richard y Herbert Robbins, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, FCE, 2002.

Filloy, Eugenio, Teresa Rojano y Luis Puig, *Educational Algebra. A theorical and Empirical Approach*, EUA, Springer, 2008 (Mathematics Education Library).

Willerding, Margaret, *Conceptos matemáticos. Un enfoque histórico*, México, CECSA, 1971.

National Council of Theachers of Mathematics (NCTM), *Defining Mathematics Education. Presidential yearbook selections 1926-2012*. EUA, 2013.

D´Amore, Bruno, *Bases filosóficas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*, Madrid, Reverté, 2005.

Santos Trigo, Luis Manuel, *La función cuadrática. Enfoque de resolución de problemas*, México, Trillas, 2010.

Ortega, Isabel, *Pitágoras y la raíz cuadrada, la fuerza de la imagen*, Buenos Aires, Lumen, 2009.

Cuadernos de investigación. Año 1, Núm. 1, *Resolución de problemas, conceptos básicos*, San José, Centro de investigaciones Matemática y Meta Matemática-Universidad de Costa Rica, 2006.

Cuadernos de investigación. Año 1, Núm. 2, *La escuela francesa de didáctica de las matemáticas, conceptos básicos*, San José, Centro de investigaciones Matemática y Meta Matemática-Universidad de Costa Rica, 2006.

Revista *Educación Matemática*, Años 2010, 2011 y 2012; números 1, 2, y 3. México.

González, Pedro, *Pitágoras, el filósofo del número. La matemática en sus personajes 9*, Madrid, Nivola, 2001 (La matemática en sus personajes).

Torija, Rosalina, *Arquímedes, alrededor del círculo, La matemática en sus personajes 1*, Madrid, Nivola, 2003 (La matemática en sus personajes).

Matemáticas 3. Serie Saberes es una obra diseñada por maestros e investigadores expertos en la enseñanza de las matemáticas que busca desarrollar el pensamiento abstracto. Así, los alumno desarrollarán de manera ágil y sencilla las competencias para la vida y serán capaces de:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Estas competencias, necesarias para desempeñarse en la sociedad actual, dotarán a los alumnos de habilidades y conocimientos que les permitirán obtener un desarrollo significativo.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com

ISBN 978-607-32-2467-3